Loi de Boyle Mariotte

- Enoncé de la loi :
  Lors d'une transformation à température constante, la pression d'un gaz constitué d'une certaine quantité matière varie inversement proportionnellement avec le volume qu'occupe ce gaz.

- Expression mathématique :
  $P = k \cdot \frac{1}{V}$ ou encore $P \cdot V = k = Cste$ au cours de la transformation
  Où k est une constante au cours de la transformation

  Rq : k dépend de la température et de la quantité de matière. Ce n'est donc pas une constante universelle, mais une constante qui dépend des conditions de l'expérience.

- Applications :

Exercice 1 :

À 20 m de profondeur, la pression vaut $P_1 = 3{,}0$ bar. Un plongeur expire une bulle d'air de volume $V_1 = 25$ mL.
Exprimer et calculer le volume V_2 occupé par l'air de la bulle à la surface où la pression est $P_2 = 1{,}0$ bar.

On applique la loi de Boyle et Mariotte : au cours de la transformation, le produit $P.V = cste$

D'où $P_1.V_1 = P_2V_2$

donc $P_2 = \frac{P_1.V_1}{V_2}$ A.N. $P_2 = \frac{3{,}0 \times 25}{1{,}0} = 75\ mL$

Exercice 2 :

En pâtisserie, un siphon permet de réaliser des crèmes chantilly bien aérées. Les cartouches de gaz d'un tel siphon contiennent 8,0 g de protoxyde d'azote N_2O. Cette masse correspond à un volume $V_1 = 4{,}4$ L de gaz quand la pression atmosphérique est $P_1 = 1{,}0$ bar et la température $\theta_1 = 20$ °C.
La notice de la cartouche indique que la pression à l'intérieur de la cartouche est $P_2 = 72$ bar.

1. Calculer la masse volumique ρ du protoxyde d'azote à la pression P_1 et à la température θ_1.

2. Exprimer et calculer le volume V_2 occupé par 8 g de protoxyde d'azote gazeux N_2O à la température $\theta_1 = 20$ °C et à la pression à l'intérieur de la cartouche $P_2 = 72$ bar.

3. Exprimer et calculer la capacité, c'est-à-dire le volume, de la cartouche, noté V_c, si le siphon est assimilé à un cylindre de hauteur $h = 6{,}5$ cm et de diamètre $D = 1{,}8$ cm.

4. Relever l'incohérence de ces deux résultats et proposer une explication.

1. Masse volume du protoxyde d'azote :
   $\rho = \frac{m_{N_2O}}{V}$ A.N. $\rho = \frac{8{,}0}{4{,}4} = 1{,}8\ g.L^{-1}$
2. Loi de Boyle Mariotte :
   $P_1.V_1 = P_2V_2$
   donc $V_2 = \frac{P_1.V_1}{P_2}$ A.N. $V_2 = \frac{1{,}0 \times 4{,}4}{72} = 6{,}1 \times 10^{-2} L = 61\ mL$

3. Volume du cylindre :

$$V = S \times h = \pi.\left(\frac{D}{2}\right)^2.h$$

A.N. $V = \pi.(9{,}0 \times 10^{-3})^2 \times 6{,}5 \times 10^{-2} = 1{,}65 \times 10^{-5} m^3 = 1{,}65 \times 10^{-2} L = 16{,}5\ mL$

4. $V < V_2$, une partie du protoxyde d'azote est sous forme liquide dans la cartouche.

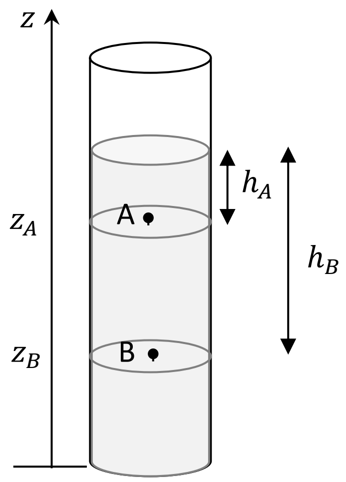
Loi de la statique des fluides

- La pression mesurée en un point d'un fluide incompressible (=liquide) dépend de la profondeur du point et la masse volumique du liquide
  La loi de la statique des fluides relie les pressions entre 2 points d'un liquide à des profondeurs différentes.

- Expression de la loi de la statique des fluides en fonction des altitudes :
  Lorsque $P_B > P_A$ (et donc $z_B < z_A$) :

$$P_B - P_A = \rho_{huile}.g.(z_A - z_B)$$

Démonstration :



On considère une colonne de section S contenant un liquide de masse volumique ρ. Soit A et B deux points du liquide aux altitudes respectives z_A et z_B. Soit P_A la pression en A et P_B en B.
La pression en un point du liquide résulte de la force pressante exercée par la matière située au-dessus de ce point.

Force pressante F_0 qui agit à la surface du liquide :
$F_0 = P_{atm}.S$

Force pressante exercée sur la surface S_A
$F_A = F_0 + P_{liquide\ situé\ au\ dessus}$
$F_A = F_0 + m_l.g = F_0 + \rho.V.g = F_0 + \rho.S.h_A.g$

Pression en A :
$P_A.S = P_{atm}.S + \rho.S.h_A.g$
$P_A = P_{atm} + \rho.h_A.g$

Pression en B :
$P_B = P_{atm} + \rho.h_B.g$

Différence de pression $P_B - P_A$:
$P_B - P_A = \rho.g.(h_B - h_A) = \rho.g.(z_A - z_B)$

- Applications :

1. Montrer que lorsqu'on plonge dans l'eau, on peut faire l'approximation suivante : chaque fois qu'on descend de 10m, la pression augmente de 1bar.
   Données : $1bar = 10^5\ Pa$ $\rho_{eau} = 1000\ kg.m^{-3}$ $g \approx 10\ N.kg^{-1}$

Loi de la statique des fluides : $P_{10} - P_0 = \Delta P = \rho_{eau} . g . h$

A.N. $\Delta P = 1000 \times 10 \times 10 = 10^5\ Pa = 1 bar$

La pression augmente bien de 1 bar lorsqu'on descend de 10m.

2. Plongée

Un plongeur remonte de 2,5 m de profondeur à la surface alors que ses poumons contiennent un volume $V = 4{,}0$ L d'air, pour une contenance maximale $V_{max} = 5{,}0$ L. La pression atmosphérique vaut $P_0 = 1{,}0$ bar.

a. Exprimer puis calculer la pression P à la profondeur $h = 2{,}5$ m.

b. Estimer les risques encourus par le plongeur s'il remonte sans expirer.

a. Calcul de la pression à 2,5 m :

$P_{2,5} - P_0 = \rho_{eau} . g . h$ d'où $P_{2,5} = P_0 + \rho_{eau} . g . h$

A.N. $P_{2,5} = 10^5 + 1000 \times 10 \times 2{,}5 = 1{,}25 \times 10^5 Pa = 1{,}25\ bar$ approximativement

$P_{2,5} = 10^5 + 1000 \times 9{,}8 \times 2{,}5 = 1{,}245 \times 10^5 Pa = 1{,}245\ bar$ plus précisément

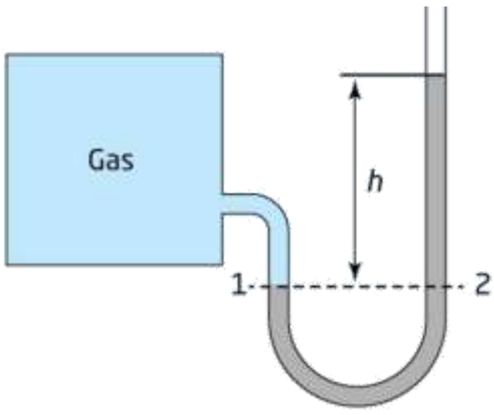
b. Calcul du volume des poumons si le plongeur n'expire pas en remontant :

$P_{2,5} . V = P_0 . V_0$

donc $V_0 = \frac{P_{2,5} . V}{P_0}$ A.N. $V_0 = \frac{1{,}25 \times 4{,}0}{1{,}0} = 5{,}0\ L$

Les poumons augmentent de volume….

3. Les manomètres à colonne de liquide consistent en une colonne verticale de liquide piégée dans un tube dont les extrémités sont soumises à deux pressions différentes.
Soit un liquide incompressible de masse volumique ρ, est placé dans un tube en U. On relie un côté du tube en U à une enceinte fermée contenant un gaz à la pression P_1, l'autre côté du tube est ouvert à l'air dont la pression est notée P_0.
La section du tube est S.



a. Préciser la valeur de h si $P_1 = P_0$.

$h = 0$

b. Dessiner les forces pressantes qui s'exercent en 1 et 2 sur la partie du liquide située dans le tube en U. Donner la relation qui existe entre ces deux forces. En déduire la relation entre les pressions P_1 et P_2 en ces points.

$F_1 = F_2$ or $F_1 = P_1 . S$ et $F_2 = P_2 . S$ d'où $P_1 = P_2$

c. Exprimer la pression au point 2 du liquide.

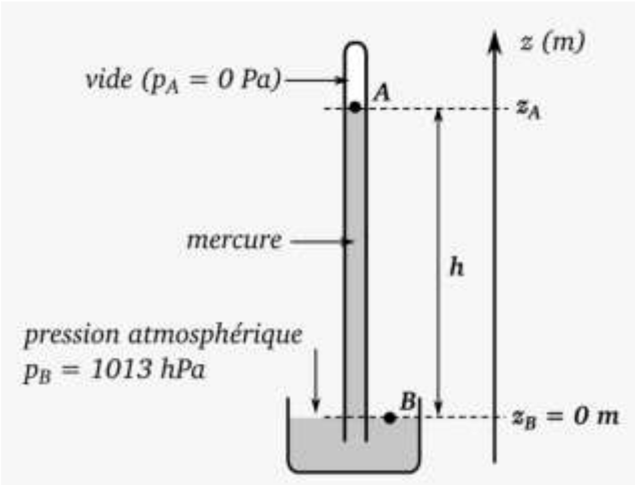
$$P_2 = P_0 + \rho . g . h$$

d. Etablir l'expression de P_1 en fonction de P_0, ρ, g, et h.

$P_1 = P_0 + \rho . g . h$

4. Le baromètre de Toricelli :

Un baromètre est un appareil qui permet de mesurer la pression atmosphérique. Torricelli mis au point en 1643 un baromètre qui contenait une colonne de mercure.



a. Calculer l'altitude z_A du point A lorsque la pression atmosphérique est normale ($p_B = 1013\ hPa$), sachant que la masse volumique du mercure a pour valeur $\rho = 13500\ kg.m^{-3}$. En déduire la valeur de h.

Loi de la statique des fluides : $p_B - p_A = \rho_{Hg} . g . h$

d'où $h = \frac{p_B - p_A}{\rho_{Hg} \cdot g} = \frac{p_B}{\rho_{Hg} \cdot g}$

A.N. $h = \frac{1013 \times 10^2}{13500 \times 9{,}81} = 0{,}765\ m = 765\ mm$

On dit : « La pression atmosphérique est de 765 mm de mercure ».

b. Est-il commode de réaliser un baromètre similaire en remplaçant le mercure par de l'eau dont la masse volumique est $\rho = 1000\ kg.m^{-3}$? Justifier votre réponse.

Si on remplace le mercure par de l'eau : $h' = \frac{p_B}{\rho_{eau} \cdot g}$ A.N. $h' = \frac{1013 \times 10^2}{1000 \times 9{,}81} = 10{,}3\ m$

Le baromètre serait beaucoup trop grand.

c. Interpréter l'expérience photographiée ci-dessous :

https://www.youtube.com/watch?v=K7Y_WHo_VWA&ab_channel=physiquewallon

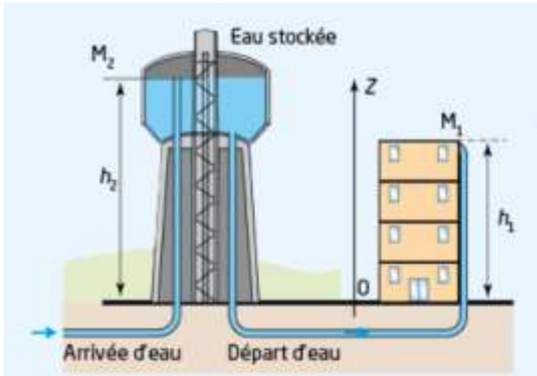
5. Château d'eau :

Pour assurer une distribution correcte de l'eau courante, la surpression $P_1 - P_2$ au niveau d'un robinet fermé doit être de 3,0 bar.
Lors de la construction d'un écoquartier sur un terrain plat, on souhaite fabriquer un château d'eau de hauteur h_2 permettant d'assurer la distribution à un immeuble dont le dernier étage se situe à une hauteur $h_1 = 10$ m.

1. Réaliser un schéma de la situation mettant en évidence les hauteurs h_1 et h_2.

2. Exprimer et calculer la hauteur minimale h_2 du château d'eau permettant d'assurer une distribution correcte d'eau courante au dernier étage de l'immeuble.

Donnée : pression atmosphérique : $P_2 = P_{atm} = 1{,}0$ bar $= 1{,}0 \times 10^5$ Pa.



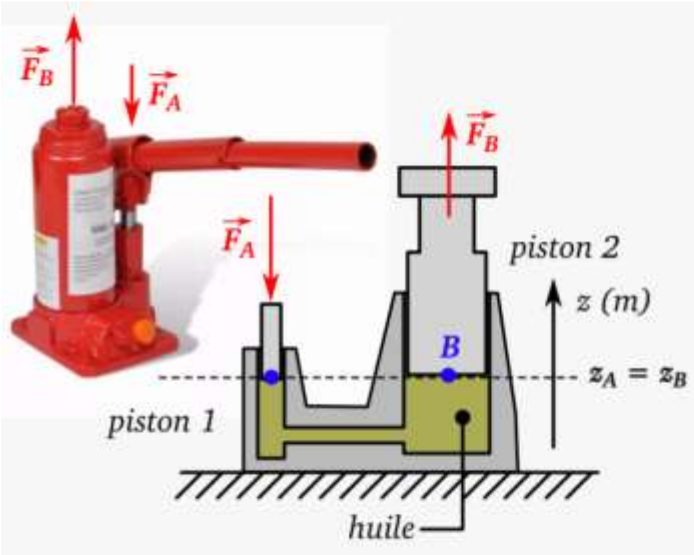
Loi de la statique des fluides :

$P_1 - P_2 = \rho_{eau}.g.(h_2 - h_1)$ d'où $h_2 - h_1 = \frac{P_1 - P_2}{\rho_{eau} \cdot g}$

soit $h_2 = h_1 + \frac{P_1 - P_2}{\rho_{eau} \cdot g}$

A.N. $h_1 = 10 + \frac{3{,}0 \times 10^5}{1000 \times 9{,}81} = 40{,}6\ m$

6. Un cric hydraulique est un dispositif qui permet de soulever une charge lourde (piston 2) en actionnant une pompe à main. Une force de norme $F_A = 100\ N$ est exercée sur le piston 1 dont le diamètre est de $8{,}0\ mm$. Le piston 2 a un diamètre de $120\ mm$. La masse volumique de l'huile hydraulique est $\rho_{huile} = 800\ kg.m^{-3}$.



a. Déterminer la pression de l'huile au point A.
b. Déterminer la pression de l'huile au point B, et justifier votre réponse.
c. En déduire la norme de la force F_B et expliquer l'intérêt du dispositif.

a. Pression de l'huile au point A :

Définition de la pression : $P_A = \frac{F_A}{S_{piston1}} = \frac{F_A}{\pi.\left(\frac{d_1}{2}\right)^2}$

A.N. $P_A = \frac{100}{\pi\times\left(\frac{8{,}0\times10^{-3}}{2}\right)^2} = 1{,}99 \times 10^6\ Pa \approx 20\ bar$

b. Pression de l'huile au point B :

D'après la loi de la statique des fluides : $P_B - P_A = \rho_{huile}.g.(z_A - z_B)$

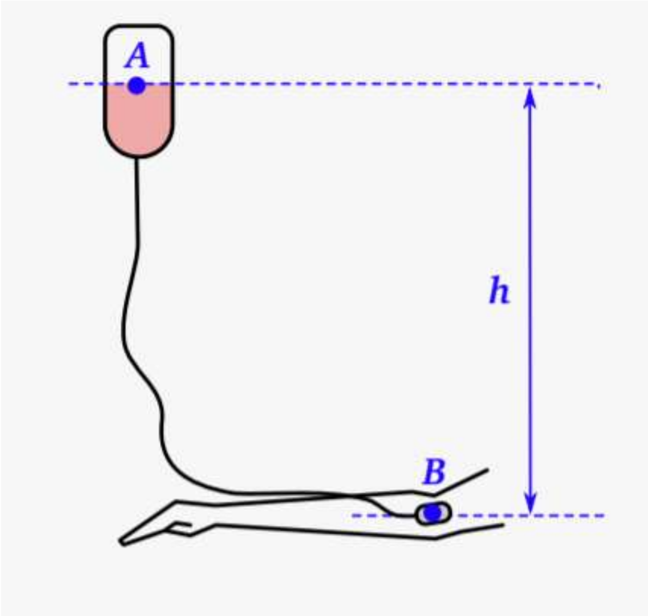
Or $z_A = z_B$ d'où $P_A - P_B = 0$ soit $P_A = P_B$

c. Définition de la pression : $P_B = \frac{F_B}{S_{piston2}} = \frac{F_B}{\pi.\left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$

d'où $F_B = P_B.\pi.\left(\frac{d_2}{2}\right)^2$

A.N. $F_B = 1{,}99 \times 10^6 \times \pi \times \left(\frac{0{,}120}{2}\right)^2 = 22{,}5\ kN$

7. La pression artérielle est la différence entre la pression que le sang exerce sur les parois des artères et la pression atmosphérique. Elle s'exprime en «cm de mercure» : $1\ cm\ Hg = 1333\ Pa$.
   La pression systolique (autour de $12\ cm\ Hg$) correspond à la contraction des ventricules et la pression diastolique (autour de $7\ cm\ Hg$) correspond au relâchement du cœur.
   La masse volumique d'un liquide en perfusion est voisine de celle du sang : $\rho_{sang} = 1060\ kg.m^{-3}$.
   Déterminer à quelle hauteur minimale h on doit placer la poche de liquide à perfuser sur un patient dont la pression systolique est de $14\ cm\ Hg$



Loi de la statique des fluides : $P_B - P_A = \rho_{sang}.g.(z_A - z_B) = \rho_{sang}.g.h$

d'où $h = \frac{P_B - P_A}{\rho_{sang}.g}$ A.N. $h = \frac{(14-0)\times 1333}{1060\times 9,8} = 1,8\ m$