EXERCICE : SENSATIONS FORTES A LA FÊTE FORAINE

On étudie le mouvement du centre d'inertie G d'un chariot de fête foraine. On considérera le chariot comme une masse ponctuelle réduite à son centre d'inertie G. On distingue cinq parties dans la trajectoire de G (voir figure 1) :

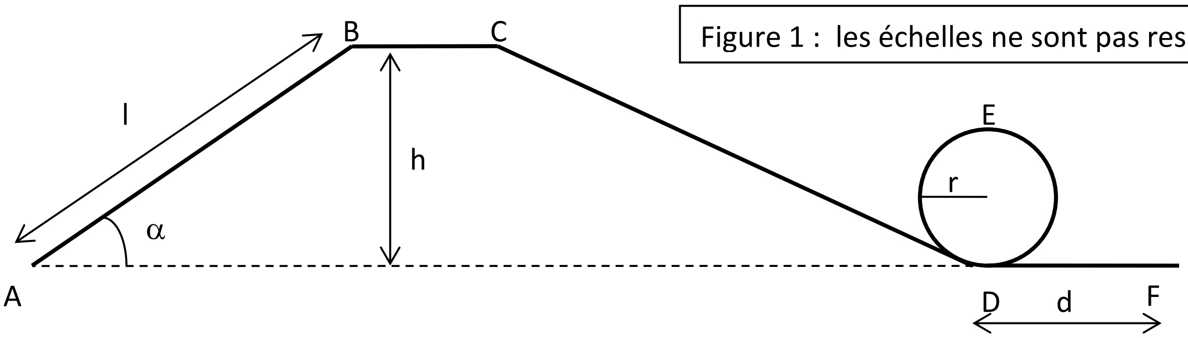
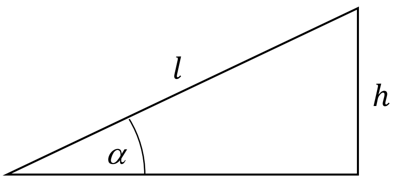


Figure 1 : les échelles ne sont pas respectées

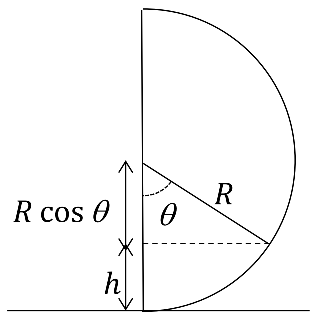
- Une montée rectiligne AB inclinée d'un angle α = 35,0 ° par rapport à l'horizontale, et sur laquelle le chariot est tracté par un câble sur la longueur *l* = AB = 32,0 m.
- Une partie BC rectiligne horizontale située à l'altitude *h* par rapport au sol.
- Une descente rectiligne CD.
- Une partie DED correspondant au looping assimilé à un cercle de rayon *r* = 5,00 m.
- Une partie rectiligne horizontale DF correspondant au freinage du chariot.

Le chariot de masse *m* = 446 kg démarre en A avec une vitesse initiale nulle. On néglige tous les frottements et on prendra *g* = 9,81m·s^{-2}.

Rappels mathématiques :



$$\sin \alpha = \frac{h}{l}$$



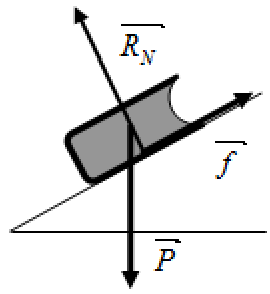
Rappels physiques : quelques forces

Bilan des forces sur le système : { livre }

$\overrightarrow{P}$: poids du livre

$\overrightarrow{R_N}$: Réaction de la table (s'oppose à l'enfoncement)

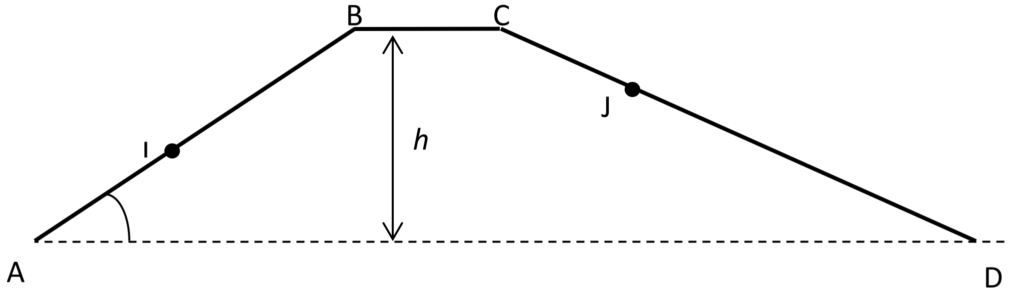
$\overrightarrow{f}$: frottements (s'opposent au glissement)



1. Montée AB

La montée s'effectue par un câble exerçant une force de traction constante sur le chariot, parallèle à (AB), orienté vers B, et d'intensité $F_B = 2{,}537 \times 10^3\ N$ sur la longueur $l = AB = 32{,}0\ m$.

1.1. Représenter les forces extérieures exercées sur le chariot au point I entre A et B (sans souci d'échelle).



1.2. Calculer le travail fourni au chariot par la force $\overrightarrow{F_B}$ le long du chemin AB.

1.3. Montrer que dans ces conditions le chariot arrive au point B avec la vitesse $v_B = 2{,}0\ m \cdot s^{-1}$

2. Partie rectiligne BC
Le câble est instantanément décroché en B et le chariot continue son mouvement sur la partie horizontale BC.

2.1. Déterminer et justifier la nature du mouvement du chariot sur cette partie.

2.2. Déduire la valeur de la vitesse v_C au point C.

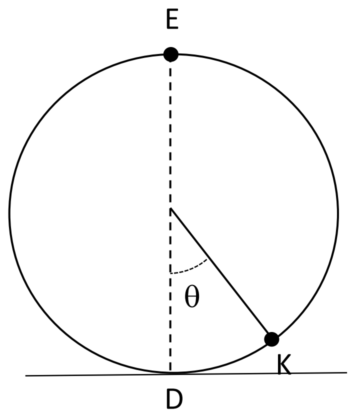
3. Descente CD

3.1. Sur le schéma de la question 1, représenter, sans souci d'échelle, les forces extérieures exercées sur le chariot au point J entre C et D.

3.2. Etablir l'expression de la vitesse v_D du chariot au point D en fonction de v_C, g, l et α.

3.3. Calculer v_D en km·h^{-1}. On prendra v_C = 2,00 m·s^{-1}

4. Looping DED
Le chariot arrive au point D à la vitesse v_D = 19,1 m·s^{-1} et effectue un looping circulaire DED.

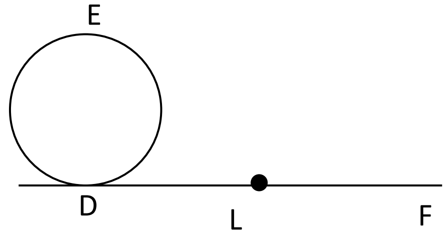


4.1. Sur le schéma ci-contre, représenter les forces extérieures exercées sur le chariot au point K entre D et E (sans souci d'échelle).

4.2. Au point K repéré par l'angle θ par rapport à la verticale, établir l'expression de la valeur de la vitesse v_K en fonction de v_D, g, r et θ.

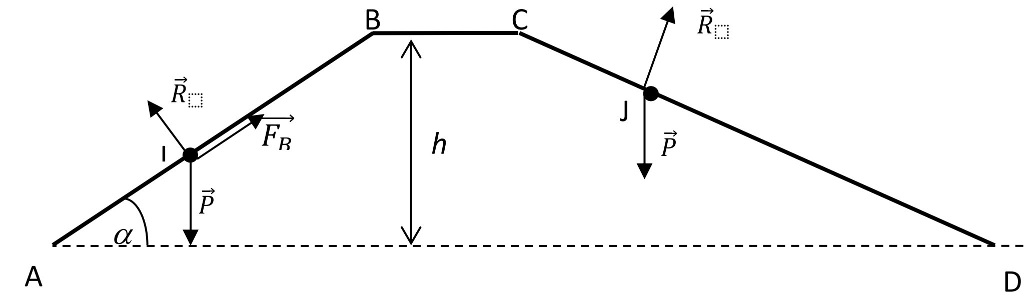
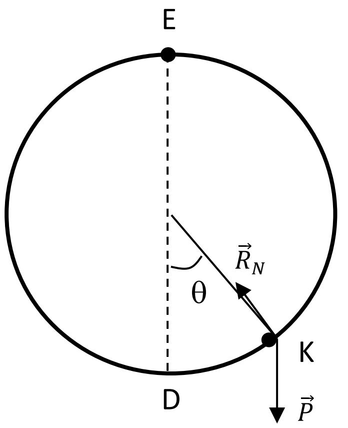
4.3. Pour que le chariot atteigne le point E sans tomber, il faut que l'expression de sa vitesse en E soit $v_E = \sqrt{gr}$. Vérifier que le lopping est réussi.

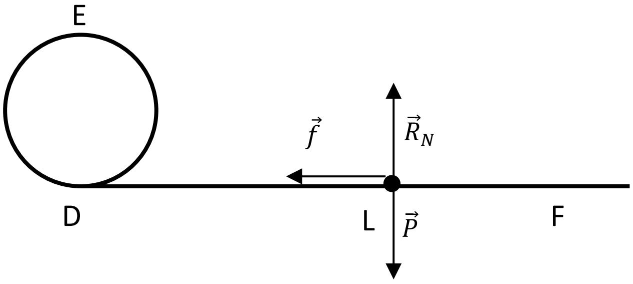
5. Freinage DF
Après le looping, le chariot arrive de nouveau au point D à la vitesse $v_D = 19{,}1\ m \cdot s^{-1}$ et se dirige vers le point d'arrivée F. Un dispositif de freinage permet au chariot de s'immobiliser au point F après avoir parcouru la distance DF = d = 20,0 m. On suppose constante l'intensité de la force de freinage que l'on note $\vec{f}$.



5.1. Sur le schéma ci-contre, représenter, sans souci d'échelle, les forces extérieures subies par le chariot au point L entre D et F.

5.2. Calculer la valeur de $\vec{f}$ nécessaire pour que le chariot s'arrête en F. On cosidèrera que la force de frottement est constante sur la partie DF.

	EXERCICE : SENSATIONS FORTES A LA FETE FORAINE
	
1.1.	Système : {chariot} dans le référentiel terrestre supposé Galiléen (pour tout l'exercice) $\vec{F}_{ext}$ **:** $\vec{P}, \vec{R}$ et $\overrightarrow{F_B}$ voir figure
1.2.	W($\overrightarrow{F_B}$) $= F_B \cdot l$ A.N. $W\left(\overrightarrow{F_B}\right) = 8{,}12 \times 10^4\ J = 81{,}2\ kJ$
1.3.	Théorème de l'énergie cinétique : $\Delta Ec_{A\rightarrow B} = Ec_B - Ec_A = \sum W_{AB}(\vec{F}_{ext})$ Soit $\frac{1}{2}\ m.v_B^2 - \frac{1}{2}\ m.v_A^2$ = W($\vec{P}$) + W($\vec{R}$) + W($\overrightarrow{F_B}$) $m.g.(z_A - z_B) + 0 + F_B.AB = -m.g.h + F_B.l = F_B.l - m.g.l.sin\alpha$ Or v_A = 0 donc $v_B = \sqrt{\frac{2}{m}\cdot(F_B \cdot l - m \cdot g \cdot l \cdot sin\alpha)}$ A.N. $v_A = 2{,}0\ m.s^{-1}$
2.1.	$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ donc d'après le principe de l'inertie mouvement rectiligne uniforme
2.2.	Conséquence : $v_C = v_B$ = 2,0 m/s
3.1.	$\vec{F}_{ext}$: $\vec{P}, \vec{R}_N$ voir figure
3.2.	Théorème de l'énergie cinétique : $\Delta Ec_{C\rightarrow D} = Ec_D - Ec_C = \sum W_{CD}\ (\vec{F}_{ext})$ Soit $\frac{1}{2}m.v_D^2 - \frac{1}{2}\ m.v_C^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}_N) = m.g.(z_C - z_D) + 0$ $= +mgh = mgl \sin\alpha$ donc $v_D = \sqrt{v_C^2 + 2gl\ sin\alpha}$
3.3.	v_D = 19,1 m.s^{-1} = 68,7 km.h^{-1}
4.1.	 $\vec{F}_{ext} : \vec{P}, \vec{R}_N$
4.2.	Théorème de l'énergie cinétique : $\Delta Ec_{D\rightarrow K} = Ec_K - Ec_D = \sum W_{DK}(\vec{F})$ Soit $\frac{1}{2}.m.v_K^2 - \frac{1}{2}.m.v_D^2 = = W(\vec{P}) + W(\vec{R}_N) = m.g.(z_D - z_K) + 0$ Avec $z_D - z_K = r.(1 - \cos\theta)$ D'où $\frac{1}{2}.m.v_K^2 - \frac{1}{2}.m.v_D^2 = -m.g.r.(1 - cos\theta)$

	donc $v_K = \sqrt{v_D^2 - 2.g.r.(1 - cos\theta)}$
4.3.	Théorème de l'énergie cinétique : $\Delta Ec_{D\rightarrow E} = Ec_E - Ec_D = \sum W_{DE}(\vec{F})$ Soit $\frac{1}{2}.m.v_E^2 - \frac{1}{2}.m.v_D^2 = = W(\vec{P}) + W(\vec{R}_N) = m.g.(z_D - z_E) + 0$ Avec $z_D - z_E = -2r$ $v_E = \sqrt{v_D^2 - 4gr}$ A.N. $v_E = \sqrt{19{,}1^2 - 4 \times 9{,}81 \times 5{,}0} = 13{,}0\ m.s^{-1}$ or $\sqrt{gr} = \sqrt{9{,}81 \times 5{,}0} = 7{,}0\ m.s^{-1}$ Le looping est réussi car $v_E > \sqrt{gr}$
5.1.	
5.2.	Théorème de l'énergie cinétique : $\Delta Ec_{D\rightarrow F} = Ec_F - Ec_D = \sum W_{DF}(\vec{F})$ Soit $\frac{1}{2}.m.v_F^2 - \frac{1}{2}.m.v_D^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{f})$ Avec $v_F = 0, W(\vec{P}) = 0, W(\vec{R}) = 0$ et $W(\vec{f}) = -f\ .d$ D'où $-\frac{1}{2}.m.v_D^2 = -f\ .d$ soit $d = \frac{m.v_D^2}{2d}$ A.N. $d = \frac{446 \times 19{,}1^2}{2 \times 20{,}0} = 4067\ N$