Energie cinétique, une énergie due au mouvement

L'**énergie cinétique** est l'énergie que possède un corps du fait de son mouvement.
Elle se calcule de façon suivante : $Ec = \frac{1}{2}mv^2$

a. Calculer l'énergie cinétique d'un coureur de masse $m = 70\ kg$ à la vitesse $v = 10\ km.h^{-1}$.

$$Ec = \frac{1}{2} \times 70 \times \left(\frac{10}{3{,}6}\right)^2 = 270\ J$$

b. Calculer l'énergie cinétique d'une voiture de masse $m = 1500\ kg$ à la vitesse $v = 130\ km.h^{-1}$

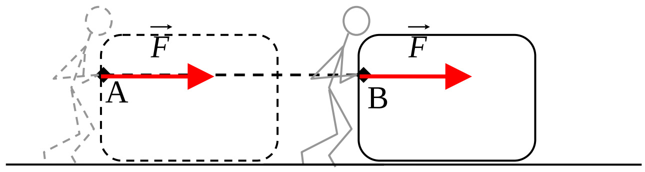
$$Ec = \frac{1}{2} \times 1500 \times \left(\frac{130}{3.6}\right)^2 = 9{,}78 \times 10^5\ J = 978\ kJ$$

Travail d'une force ou « comment augmenter l'énergie cinétique d'un système ? »

Le travail d'une force est l'énergie fournie/consommée par cette force lorsque son point d'application se déplace. Le travail est exprimé en joules (J), et est souvent noté W, initiale du mot anglais Work.

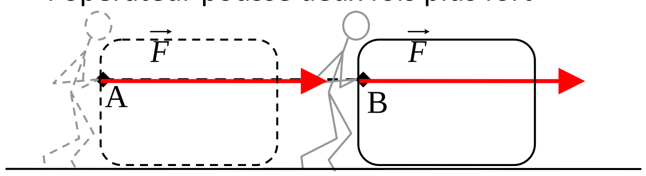
I. Expression générale du travail d'une force constante

- Comment doit être dirigée la force pour augmenter le plus efficacement l'énergie cinétique du système ?



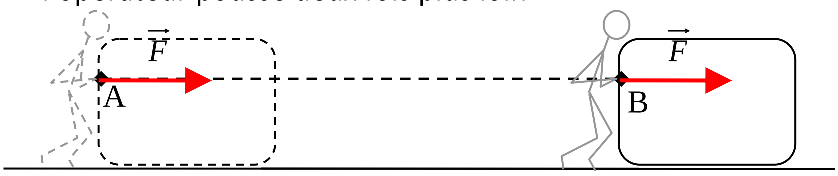
La force doit être parallèle au déplacement

- Que peut-on dire de l'énergie apportée si :
  - l'opérateur pousse deux fois plus fort



L'énergie double

  - l'opérateur pousse deux fois plus loin

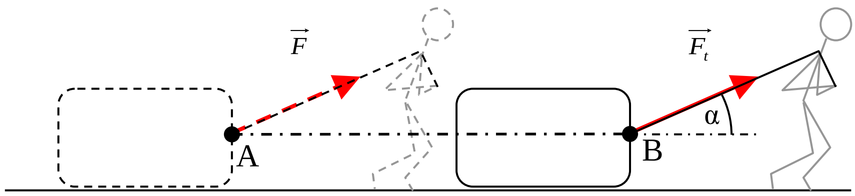


L'énergie double

En déduire une expression du travail de la force $\vec{F}$ sur le déplacement AB, en fonction de F et AB :

Le travail est proportionnel à la force et au déplacement : $W_{\vec{F}_{AB}} = F.AB$

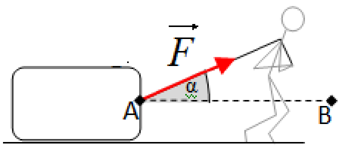
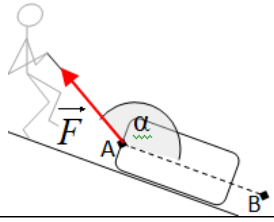
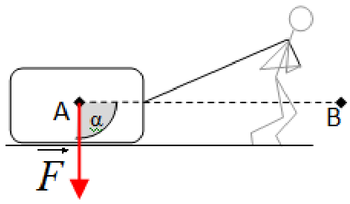
- Généralisation : dans le cas d'une force qui n'est pas parallèle à la direction de déplacement, la partie de la force qui « encourage » le mouvement est la composante qui est dans le sens du déplacement.



On projette la composante de la force sur la direction du mouvement en utilisant le produit scalaire :
$W_{\vec{F}_{AB}} = F \cdot AB \cdot cos\,\alpha$

- Définition mathématique du travail d'une force : $W_{\vec{F}_{AB}} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$
  soit $W_{\vec{F}_{AB}} = F \cdot AB \cdot cos\,\alpha$

- Conséquences :

			
Effet de la Force $\vec{F}$	Contribue au déplacement	S'oppose au déplacement	Sans effet sur le déplacement
Angle	0 < α < π/2	π/2 < α < π	α = π/2
Projection de la force sur le déplacement	Dans le même sens que le vecteur déplacement $\overrightarrow{AB}$	Dans sens opposé au vecteur déplacement $\overrightarrow{AB}$	Nulle
Travail	$W_{\vec{F}_{AB}} > 0$	$W_{\vec{F}_{AB}} < 0$	$W_{\vec{F}_{AB}} = 0$

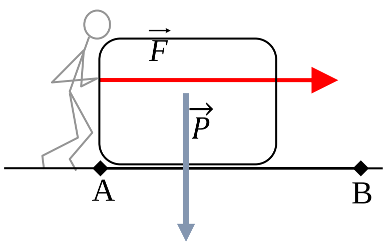
- Le travail d'une force constante est une grandeur algébrique :

  ⇨ Si le travail d'une force est positif, le système reçoit de l'énergie ; la force « encourage » le mouvement, le travail est dit « moteur »

  ⇨ Si le travail d'une force est négatif, le système perd de l'énergie ; la force « décourage » le mouvement, le travail est dit « résistant »

- Applications :

c. Calculer le travail de la force exercée par un déménageur qui pousse une armoire de masse $m = 150\ kg$ en la faisant glisser sur le plancher d'un appartement sur une longueur de $L = 5{,}0\ m$. Il exerce une force de direction horizontale, de valeur $F = 4 \times 10^2\ N$. Ce travail est-il moteur ou résistant ?
Calculer le travail du poids de l'armoire.

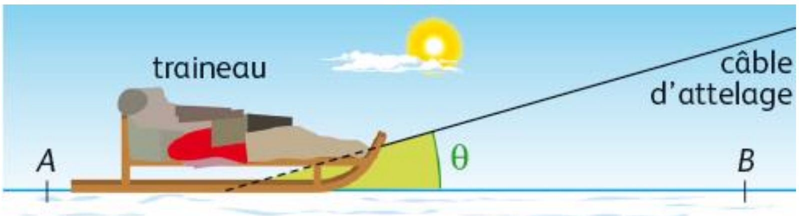


$\boldsymbol{W_{AB}\left(\vec{F'}\right) = \vec{F'} \cdot \overrightarrow{AB} = F' \times AB}$ A.N. $\boldsymbol{W_{AB}\left(\vec{F'}\right) = 4 \times 10^2 \times 5 = 2 \times 10^3 J}$

$\boldsymbol{W_{AB}\left(\vec{F'}\right) > 0}$ Le travail est moteur

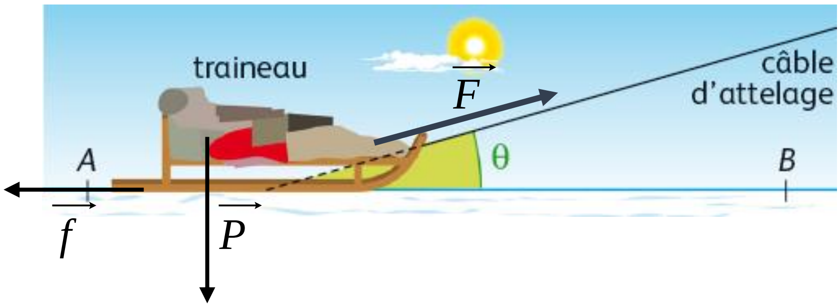
$\boldsymbol{W_{AB}\left(\vec{P}\right) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB} = 0}$

d. Un traineau est tiré sur la neige par un attelage de chiens entre deux points A et B distants de 350 m. Le câble de l'attelage exerce sur le traîneau une force $\vec{F}$ constante, de valeur $F = 2{,}0 \times 10^2 N$. Le câble fiat un angle $\theta = 10°$ avec la direction de AB. Pendant le déplacement, la neige exerce une force de frottement $\vec{f}$ que l'on supposera constante, de valeur $f = 1{,}7 \times 10^2 N$, de direction AB et de sens opposé au déplacement.



Calculer les travaux de $\vec{F}$, $\vec{f}$ et $\vec{P}$. Définir si ces travaux sont moteurs ou résistants.

Système d'étude : {traineau}
Bilan des forces :



$$W_{AB}\left(\vec{F}\right) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \times AB \times \cos\theta$$
$$W_{AB}\left(\vec{F}\right) = 2{,}0 \times 10^2 \times 350 \times \cos 10 = 6{,}9 \times 10^4 J$$ travail moteur
$$W_{AB}\left(\vec{P}\right) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$
$$W_{AB}\left(\vec{f}\right) = \vec{f} \cdot \overrightarrow{AB} = -f \times AB$$
$$W_{AB}\left(\vec{f}\right) = -1{,}7 \times 10^2 \times 350 = 9{,}4 \times 10^3 J$$ travail résistant

II. Force conservative :

Une force est conservative lorsque le travail de cette force ne dépend pas du chemin suivi lors de son déplacement d'un point à un autre

- Exemple : Travail du poids

Le poids est une force conservative : le travail ne dépend pas du déplacement de la force.

$$W_{AB}\left(\vec{F}\right) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB}$$

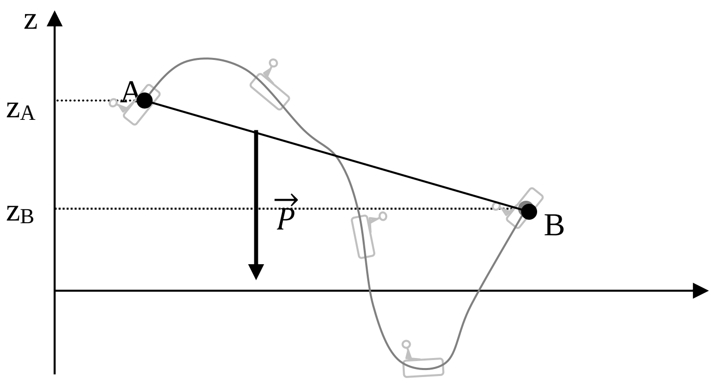
Où

$$\vec{P}\left|\begin{matrix}0\\-mg\end{matrix}\right. \quad \text{et} \quad \vec{P}\left|\begin{matrix}x_B - x_A\\z_B - z_A\end{matrix}\right.$$

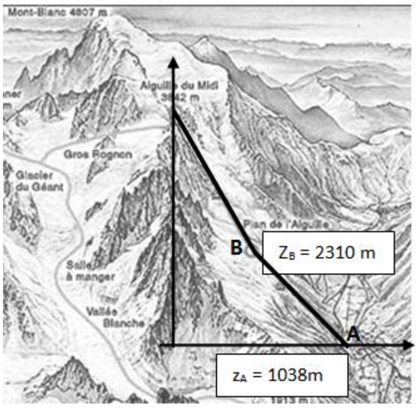
$$\vec{P} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \times (x_B - x_A) - mg \cdot (z_B - z_A)$$
$$\vec{P} \cdot \overrightarrow{AB} = mg \cdot (z_A - z_B)$$

Et donc :

$$W_{AB}\left(\vec{F}\right) = mg \cdot (z_A - z_B)$$



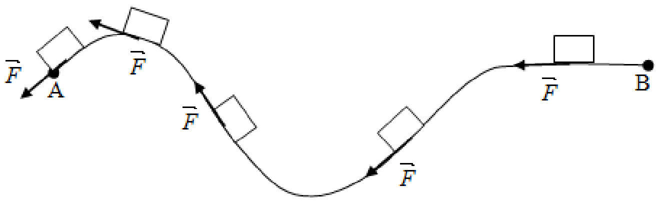
e. Pour découvrir sans fatigue la haute montagne, un touriste emprunte le téléphérique de l'Aiguille du Midi entre la station de Chamonix à l'altitude 1038m et la station intermédiaire du plan de l'Aiguille à l'altitude 2310 m. La longueur totale parcourue par la cabine du téléphérique est alors 2555 m.
Calculer le travail du poids de la cabine à la montée, puis à la descente.
Préciser dans les deux cas si ce travail est moteur ou résistant.
Données : masse de la cabine avec les passagers :
$m = 6{,}5 \times 10^3\ kg$



Lors de la montée :
$W_{AB}\left(\vec{P}\right) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB} = mg \cdot (z_A - z_B)$
A.N. $W_{AB}\left(\vec{P}\right) = 6{,}5 \times 10^3 \times 9{,}8 \times (1038 - 2310) = -81 \times 10^6 J$
Le travail du poids est résistant
Lors de la descente :
$W_{BA}\left(\vec{P}\right) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{BA} = mg \cdot (z_B - z_A)$
A.N. $W_{AB}\left(\vec{P}\right) = 6{,}5 \times 10^3 \times 9{,}8 \times (2310 - 1038) = 81 \times 10^6 J$
Le travail du poids est moteur

III. Force non conservative : cas des frottements

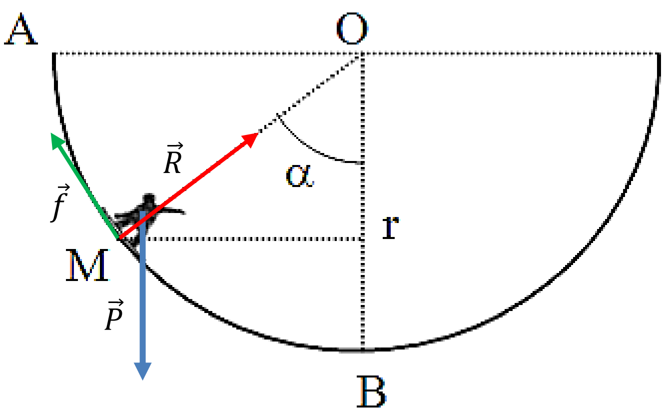
La force de frottement n'est pas une force constante, même si son intensité peut ne pas varier ; en effet, sa direction change continuellement. Le travail de cette force dépend donc du chemin suivi.



L'expression du travail de la force de frottement est :
$$W_{AB}\left(\vec{F}\right) = -F \cdot L$$
où L est la distance réellement parcourue

La force de frottement n'est pas une force conservative : elle dépend du chemin suivi au cours du déplacement. Le travail de la force de frottement est résistant : elle s'oppose au mouvement.
Exemple :

f. Un half-pipe, est une structure utilisée pour les sports de glisse comme le ski freestyle ou le snowboard. Un half-pipe classique a une hauteur de murs de $r = 5{,}0\ m$.
On considère que les frottements entre la piste et le ski sont assimilables à une force constante de valeur $f = 370\ N$
Le skieur assimilable à un point matériel de masse $m = 80\ kg$, se laisse glisser sans vitesse initiale du point A. On prendra $g = 9{,}8\ N.kg^{-1}$
Calculer le travail de chacune des forces représentées sur le schéma. Préciser si ce travail est moteur ou résistant.



Poids $\vec{P}$: il s'agit d'une force conservative dont le travail au cours de la chute s'exprime par :
$W_{\vec{P}_{A\to B}} = m\,.\,g\,.\,(z_A - z_B) = m\,.\,g\,.\,r$
$$W_{\vec{P}_{A\to B}} = 80 \times 9{,}8 \times 5 = 3920\ J$$

Remarque : $W_{\vec{P}} > 0$ car le travail est moteur (entraine le mouvement)

Réaction de la piste $\vec{R}$: force perpendiculaire à la piste (s'oppose à l'enfoncement) ; on a donc :
$W_{\vec{R}} = 0$ à chaque instant

Frottement de la piste $\vec{f}$: force non conservative dont le travail est : $W_{\vec{f}_{A\to B}} = -f\,.L$
avec $L = longueur\ d'un\ quart\ de\ périmètre = \frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi r}{2}$
D'où $W_{\vec{f}_{A\to B}} = -\frac{f\,.\,\pi r}{2}$
A.N. $W_{\vec{f}_{A\to B}} = -\frac{120\times\pi\times5}{2} = -2906\,J$

Théorème de l'énergie cinétique

La variation d'énergie cinétique d'un système au cours d'un déplacement d'un point à un autre est égale à la somme des travaux des forces qui s'exercent sur ce système au cours de son déplacement :

$$\Delta Ec = Ec_B - Ec_A = \sum W_{AB}(\vec{F})$$

Applications :

g. Dans l'exercice précédent du snowboardeur on considère que celui part de A avec une vitesse nulle.
Calculer la vitesse atteinte en B.
Quelle serait la vitesse atteinte si il n'y avait pas de frottement (présence de glace sur la neige).

$Ec_B - Ec_A = W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{R}) + W_{AB}(\vec{f})$
comme $v_A = 0$ alors $Ec_A = 0$
on a donc : $\frac{1}{2}m.v_B^2 = W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{f}) = mgr - \frac{f.\pi r}{2}$
soit $v_B = \sqrt{2gr - \frac{f\pi r}{m}}$
A.N. $v_B = \sqrt{2\times9{,}8\times5 - \frac{120\times\pi\times5}{80}} = 5{,}0\,m.s^{-1} = 18\,km.h^{-1}$

Si les frottements sont nuls :
$\Delta Ec = W_{\vec{P}_{A\to B}}$
Soit $\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = m\,.g\,.r$
ou encore $\frac{1}{2}mv_B^2 = m\,.g\,.r$ car $v_A = 0$
d'où $v_B = \sqrt{2gr}$
A.N. $v_B = 10\,m.s^{-1} = 36\,km.h^{-1}$

h. Distance de freinage
1. Une voiture de masse $m = 1000\,kg$, roule à une vitesse v.
Lorsqu'on appuie sur les freins, la force de freinage ici supposée constante tout au long du freinage a une intensité $f = 7000\,N$.
Exprimer la distance nécessaire pour arrêter le véhicule sur une route horizontale, en fonction de m, v et f.
Calculer cette distance de freinage pour les valeurs de vitesse :
$v = 30\,km.h^{-1}$, $50\,km.h^{-1}$, $80\,km.h^{-1}$ et $130\,km.h^{-1}$
2. Lorsqu'on double la vitesse de la voiture, par combien faut-il multiplier la distance de freinage ?

Bilan des forces sur la voiture et travaux de ces forces pendant le freinage :
$\vec{P}$: poids de la voiture perpendiculaire au mouvement
$\vec{R}$: réaction de la route perpendiculaire au mouvement
$\vec{f}$: force de freinage, opposée au vecteur vitesse

Théorème de l'énergie cinétique :

$$Ec_B - Ec_A = W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{R}) + W_{AB}(\vec{f})$$

or $Ec_B = 0$ car $v_B = 0$

$$W_{AB}(\vec{P}) = 0$$

$$W_{AB}(\vec{R}) = 0$$

et $W_{AB}(\vec{f}) = -f\,.L$ avec $L = AB$: distance de freinage

avec $-\frac{1}{2}mv_A^2 = -f.L$

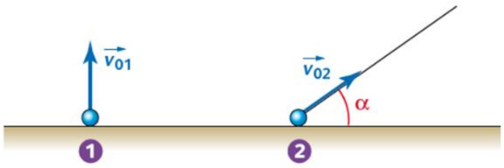
d'où $L = \frac{mv_A^2}{2f}$

A.N. $L = \frac{1000\times\left(\frac{30}{3,6}\right)^2}{2\times2500} = 5\,m$

(14 m pour 50 $km.h^{-1}$; 67 m pour 80 $km.h^{-1}$; 93 m pour 130 $km.h^{-1}$)

Si $v'_A = 2v_A$ alors $L' = \frac{mv'^2_A}{2f} = \frac{m(2v_A)^2}{2f} = 4 \times \frac{mv_A^2}{2f} = 4L$
Lorsque la vitesse double, la distance est multipliée par 4 !

i. Deux billes identiques notées 1 et 2 assimilables à des points matériels de masse m sont lancées à partir d'un même plan horizontal de deux façons différentes, comme l'indique le schéma ci-dessous sur lequel sont représentés les vecteurs vitesse $\overrightarrow{v_{01}}$ et $\overrightarrow{v_{02}}$. Ces deux vitesses ont même valeur ($v_{01} = v_{02} = v_0$).



Exprimer les altitudes maximales h_1 et h_2 atteintes respectivement par les billes 1 et 2 en fonction de v_0, g et α. On supposera les déplacements sans frottement.
Donner la relation entre h_1 et h_2.

Expression de h_1, altitude maximale atteinte dans le cas (1) :
Le système {billet} n'est soumis qu'à son poids, force conservative. L'énergie mécanique se conserve et on peut écrire : $\Delta Ec = W_{\vec{P}_{0\to S}}$
Avec $W_{\vec{P}_{0\to S}} = mg\,.(z_0 - z_S)$

D'où $\frac{1}{2}mv_S^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mg\,.(z_0 - z_S)$

Or $v_S = 0$ et $z_0 - z_S = -h_1$

D'où $-\frac{1}{2}m{v_0}^2 = -mgh_1$

Et $h_1 = \frac{{v_0}^2}{2g}$

Expression de h_2, altitude maximale atteinte dans le cas (2) :
Le système {billet} n'est soumis qu'à son poids, force conservative. L'énergie mécanique se conserve et on peut écrire : $\Delta Ec = W_{\vec{P}_{0\to S}}$
Avec $W_{\vec{P}_{0\to S}} = mg\,.(z_0 - z_S)$

D'où $\frac{1}{2}mv_S^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mg\,.(z_0 - z_S)$

Or $v_S = v_0\,.cos\alpha$ et $z_0 - z_S = -h_2$

D'où $\frac{1}{2}m{v_0}^2.\cos^2\alpha - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh_2$

Et $$h_2 = \frac{{v_0}^2.(1-\cos^2\alpha)}{2g}$$

Relation entre h_1 et h_2 : $h_2 = h_1 \cdot (1 - cos^2\,\alpha)$