Exercice Comète de Halley

La comète de Halley (désignation officielle 1P/Halley) est la plus connue de toutes les comètes. Sa distance au périhélie est de 0,59 unité astronomique et sa distance à l'aphélie est de 35,3 unités astronomiques.
On peut déduire de ces données les caractéristiques orbitales suivantes : vitesse au périhélie : 54,5 km.s^{-1}, vitesse à l'aphélie : 910 m.s^{-1}. La comète est le premier membre connu de la famille des comètes de Halley, famille qui regroupe les comètes périodiques dont la période est comprise entre 20 et 200 ans.
Le dernier passage de la comète au voisinage de la Terre remonte à l'hiver 1985/1986. La géométrie de son orbite indiquait qu'elle ne passerait pas très proche de la Terre et en plus son passage au périhélie le 09 février 1986 se faisait exactement de l'autre côté du Soleil. La comète était visible à l'œil nu dans le ciel du soir dans l'hémisphère Nord entre le 7 et le 14 janvier 1986, puis dans le ciel du matin dans l'hémisphère Sud entre le 17 et le 25 mars 1986.

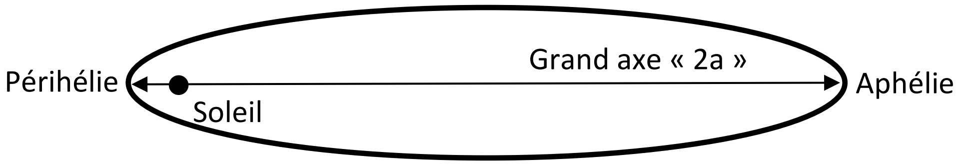
Donnée :
Masse du Soleil : $M_S = 2{,}0 \times 10^{30}\ kg$
Unité astronomique : $1\ u.a. = 1{,}5 \times 10^{11} m$

Penshaw Monument - 10 janvier 1986 – UK (Gordon ¨Percival)

Ile de Pâques - 8 mars 1986

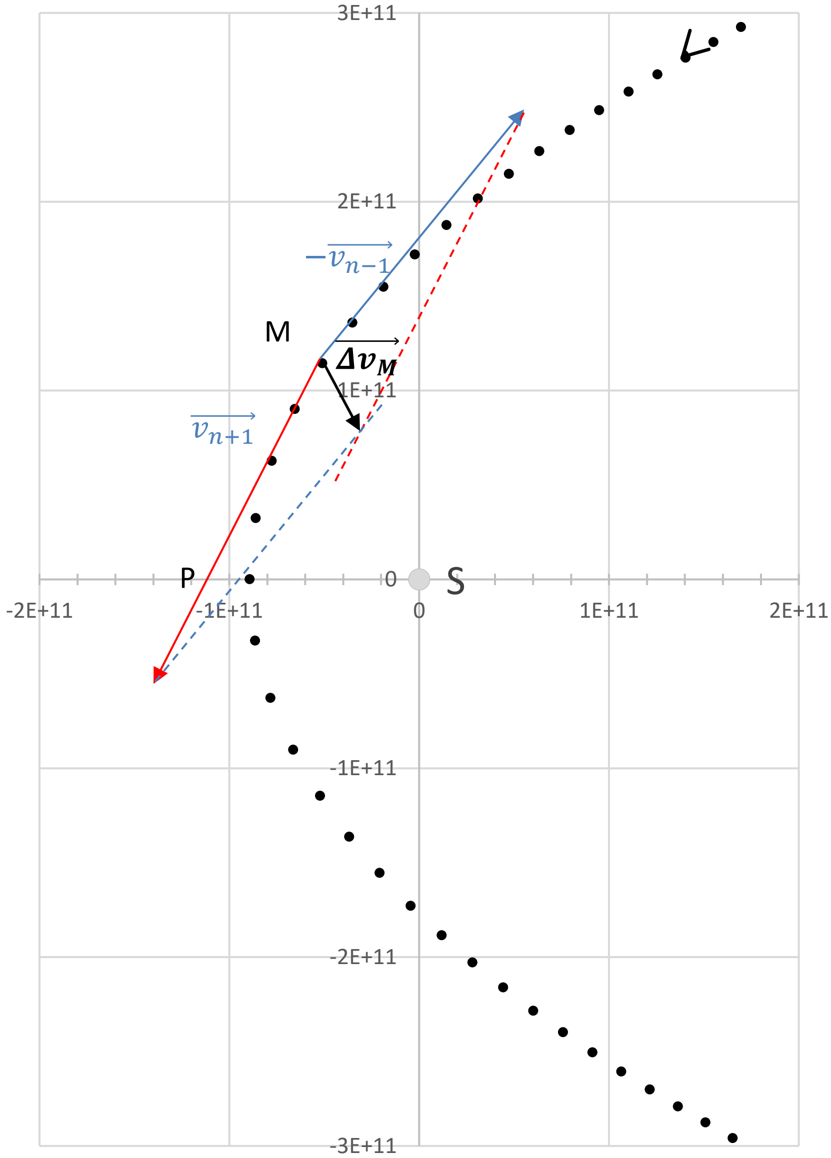
Document 1 : Trajectoire de la comète

La trajectoire d'une comète est une ellipse. Le Soleil occupe un des foyers de l'ellipse.

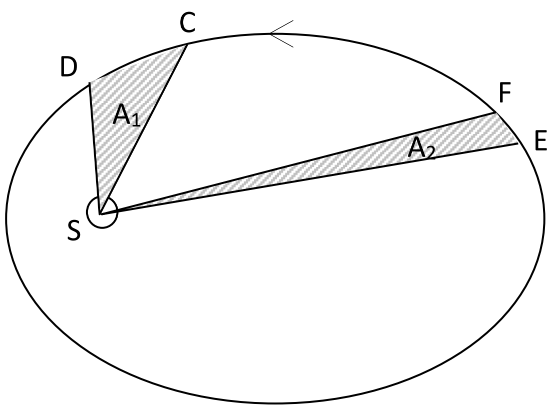


Document 2 : Passage de la comète de Halley au périhélie

Les axes du repère représenté sont gradués en mètres.
La position de la comète est représentée tous les 7 jours.



La 2ème loi deKépler énonce que le rayon SP (Soleil-comète) balaie des aires égales pendant des durées égales.
Mathématiquement, si la comète parcourt les distances CD et EF pendant la même durée Δt, alors les aires A_1 et A_2 sont égales.
Montrer que la vitesse de la comète est maximale à la périhélie et minimale à l'aphélie.



Si $A_1 = A_2$ alors $CD > EF$
Or si la comète parcourt CD et EF pendant des durées égales, alors $\frac{CD}{\Delta t} > \frac{EF}{\Delta t}$
Et donc $v_{CD} > v_{EF}$
La vitesse d'une planète augmente lorsque la planète se rapproche du soleil et diminue lorsqu'elle s'en éloigne. En conséquence, elle est maximale au voisinage du rayon le plus court (périhélie ou périgée), et minimale au voisinage du rayon le plus grand (aphélie ou apogée).

1. Déterminer la vitesse de la Comète au périhélie. Comparer avec la valeur annoncée.

Mesurons la longueur L entre le point d'avant et le point d'après :
$L = 1{,}6\ cm = \frac{1{,}6}{5} \times 2 \times 10^{11} = 6{,}4 \times 10^{10}\ m$
$v = \frac{L}{\Delta t} = \frac{L}{2\tau} = \frac{6{,}4 \times 10^{10}}{2 \times 7 \times 24 \times 3600} = 5{,}3 \times 10^{4}\ m.s^{-1} = 53\ km.s^{-1}$

Ecart avec la valeur annoncé : $\frac{54{,}5 - 53}{54{,}5} < 3\%$. Compte tenu de la précision des mesures, on peut considérer que ces deux valeurs coïncident.

2. Montrer que la deuxième loi de Newton appliquée à la comète annonce : $\overrightarrow{g_S} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$ où $\vec{g}_S$ est le champ de gravitation créé par le Soleil.
Donner les caractéristiques du vecteur $\overrightarrow{g_S}$ à la distance d du Soleil (direction, sens, expression de l'intensité).

Bilan des forces sur la comète : soumise à la force de gravitation exercée par le Soleil
$\overrightarrow{F_{S\to com}} = m\,.\overrightarrow{g_S}$

La deuxième loi de Newton annonce : $\overrightarrow{F_{S\to com}} = m\,.\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$

on a donc bien : $\overrightarrow{g_S} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$

Le champ de gravitation créé par le Soleil a les caractéristiques suivantes :
- Direction : droite Soleil-Comète
- Sens : vers le Soleil
- Intensité : $g = \frac{F_{S\to com}}{m} = G.\frac{M_S}{d^2}$

3. Montrer que la deuxième loi de Newton est bien vérifiée au points M de la trajectoire de la comète de Halley représentée dans le document 2.

   Démarche :

   - Construire le vecteur $\overrightarrow{\Delta v_n} = \overrightarrow{v_{n+1}} - \overrightarrow{v_{n-1}}$
     On prendra pour échelle des vitesses : $1{,}0\ cm = 10000\ m.s^{-1}$
   - Déterminer en utilisant l'échelle, la valeur de Δv, puis calculer $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ en $m.s^{-2}$
   - Déterminer graphiquement la distance d entre la comète et le Soleil
   - Calculer g_s

   Echelle des distances : on constate que $5{,}0\ cm = 2{,}0 \times 10^{11} m$

   Calcul de la vitesse v_{n-1} : $v_{n-1} = \frac{\frac{1{,}3}{5} \times 2{,}0 \times 10^{11}}{2 \times 7 \times 24 \times 3600} = 4{,}3 \times 10^4\ m.s^{-1}$

   On représente $-\overrightarrow{v_{n-1}}$ par un vecteur de longueur $4{,}3\ cm$.

   Calcul de la vitesse v_{n+1} : $v_{n+1} = \frac{\frac{1{,}45}{5} \times 2{,}0 \times 10^{11}}{2 \times 7 \times 24 \times 3600} = 4{,}8 \times 10^4\ m.s^{-1}$

   On représente $\overrightarrow{v_{n+1}}$ par un vecteur de longueur $4{,}8\ cm$

   On construit le vecteur : $\overrightarrow{\Delta v_M} = \overrightarrow{v_{n+1}} - \overrightarrow{v_{n-1}}$

   On mesure Δv_M : $\Delta v_M = 1{,}1\ cm = 1{,}1 \times 10^4\ m.s^{-1}$ (avec l'échelle utilisée)

   On calcule $\frac{\Delta v_M}{2\tau}$: $\frac{\Delta v_M}{2\tau} = \frac{1{,}1 \times 10^4}{2 \times 7 \times 24 \times 3600} = 9{,}1 \times 10^{-3}\ m.s^{-2}$

   Détermination de d : $d = \frac{3{,}15}{5} \times 2{,}0 \times 10^{11} = 1{,}26 \times 10^{11}\ m$

   Calcul de g_S :

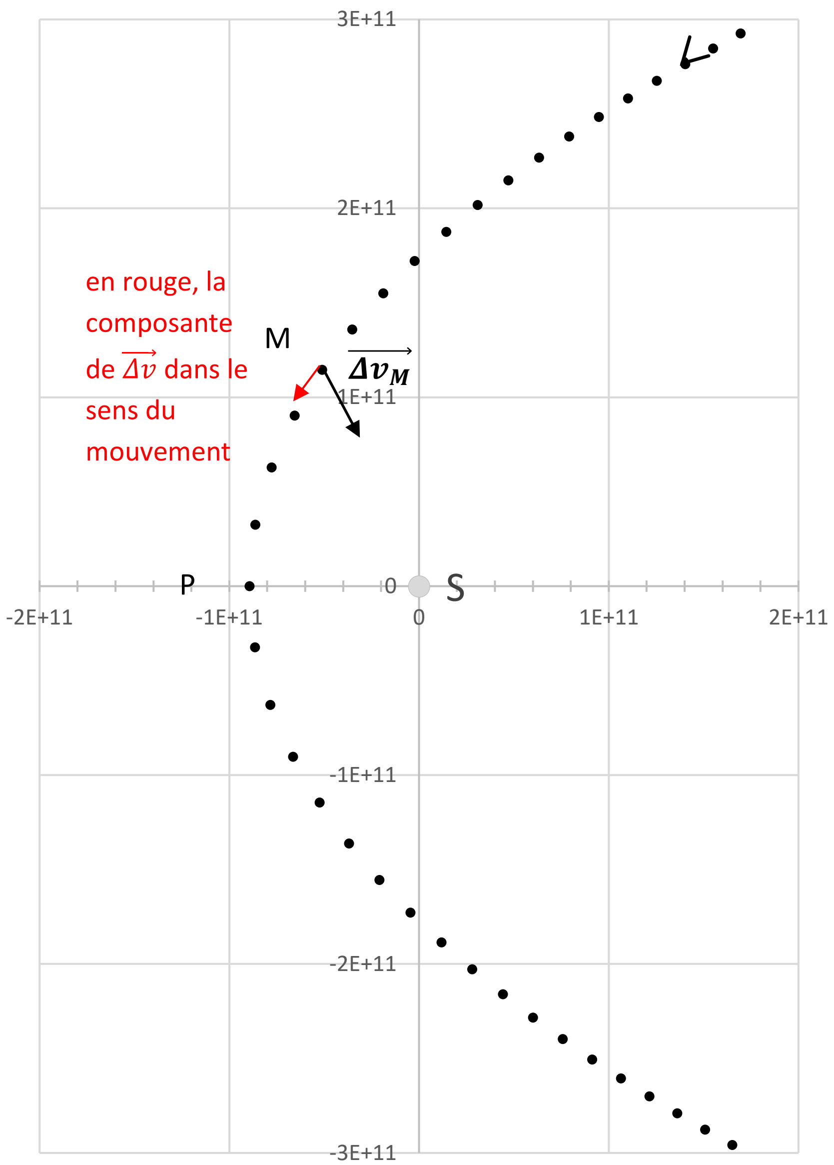
   $g_s = G.\frac{M_S}{d^2}$ A.N. $g_S = 6{,}67 \times 10^{-11} \times \frac{2{,}0 \times 10^{30}}{(1{,}26 \times 10^{11})^2} = 8{,}4 \times 10^{-3}\ m.s^{-2}$

   Les vecteurs $\overrightarrow{g_S}$ et $\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$ ont même direction et même sens ((dirigés vers le centre du Soleil).

   Calculons l'écart relatif entre les valeurs des deux intensités : $\frac{9{,}1 - 8{,}4}{8{,}4} = 8\ \%$

   Compte-tenu de la précision des mesures réalisées, on peut considérer que les deux valeurs coïncident.

   Le vecteur $\overrightarrow{\Delta v}$ a bien une composante orienté dans le sens du mouvement : la comète subit bien une accélération comme annoncée dans la question 1 (la comète accélère lorsqu'elle va de l'aphélie au périhélie).



4. Dans le cas d'une trajectoire elliptique (celle d'une comète autour du Soleil), la 3ème loi de Képler s'exprime mathématiquement comme suit : $T^2 = \frac{4\pi^2}{G.M_S}.a^3$

   où a est le demi-grand axe de l'ellipse

   Déterminer l'année du prochain passage de la comète aux alentours de la Terre.

   Détermination de a :

   $2a = d_{Soleil-Aphélie} + d_{Soleil-Périhélie} = (0{,}59 + 35{,}3) \times 150 \times 10^9 = 5{,}38 \times 10^{12} m$

   $a = 2{,}69 \times 10^{12} m$

   Calcul de la période de la comète :

   $T = \left(\frac{4\pi^2}{6{,}67\times10^{-11}\times2{,}0\times10^{30}} \times (2{,}69 \times 10^{12})^3\right)^{\frac{1}{2}} = 2{,}40 \times 10^9\ s = 76{,}05\ an$

   (Rappel : $1\ an = 365{,}25 \times 24 \times 3600\ s$)

   Estimation de la date du prochain passage :

   $1986\ +\ 76\ =\ 2062$

   La date du prochain passage au périhélie est le 28/07/2061.

Remarque : les interactions gravitationnelles que subit la comète lorsqu'elle avoisine les plus grosses planètes du système solaire ont une influence sur la période.
En 1757, Lalande, aidé par Nicole-Reine Lepaute, décida de calculer les déviations de la comète dues aux grosses planètes. Il prédit un retard de 518 jours dû à Jupiter et de 100 jours dû à Saturne. Il annonça donc le retour de la comète, non en 1758, mais en 1759 avec un passage au périhélie en avril 1759, avec une incertitude d'un mois. Lorsque la comète réapparut en décembre 1758 avec un passage au périhélie le 13 mars 1759, ce fut un triomphe. Cette prévision permit d'asseoir définitivement la mécanique newtonienne en France.

On appelle traditionnellement Rois mages les visiteurs qui figurent dans un épisode de l'Évangile selon Matthieu, lesquels, ayant appris la naissance de Jésus, viennent « de l'Orient » guidés par une étoile pour rendre hommage « au roi des Juifs » et lui apporter à Bethléem des présents d'une grande richesse symbolique : or, myrrhe et encens.
Dans l'« Adoration des Mages », Giotto peint la comète de Halley au-dessus de la Crèche. Justifier ce choix de Giotto ?


Adoration des Rois mages
Giotto , 1303-1306
Eglise de l'Arena à Padoue

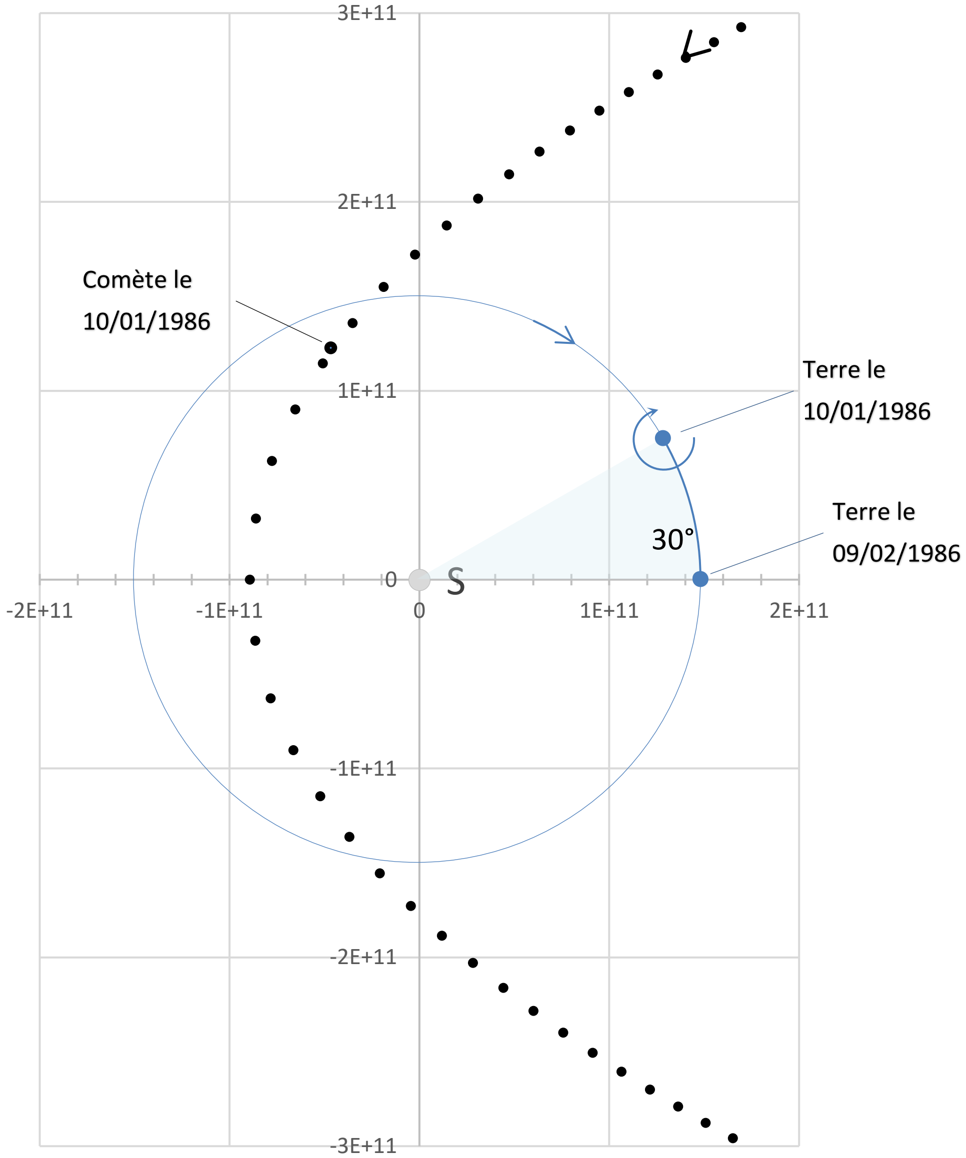
Est-il probable que la comète ait pu être observée au moment de la naissance du Christ ?
Calcul : $\frac{1986}{76} = 26{,}1$ (soit un peu plus de 26 périodes)
Année possible du passage de la comète :
$1986 - 76 \times 26 = 10$
La comète aurait pu être observée en 10 après JC.
On peut penser que Giotto ne s'est pas trompé de beaucoup…

En réalité, les calculs annoncent que la comète a fait un passage au périhélie en l'an 12 avant JC, date confirmée par des observations relevées en Chine.
Par ailleurs, les historiens retiennent aujourd'hui l'an 6 av. J.-C. comme date la plus vraisemblable de la naissance du Christ, la fourchette la plus probable allant de 9 av. J.-C. à 2 apr. J.-C. L'étoile guidant les Mages ne peut donc pas être la comète de Halley, à moins que ceux-ci ne se soient mis en route 15 ans plus tôt !!!

Ce qui est remarquable : l'existence de la périodicité des comètes n'était pas connue au XIVème siècle. En effet, ce n'est qu'en 1705, que Edmond Halley publia un livre dans lequel il avança que les comètes qui étaient apparues dans le ciel en 1531, 1607 et 1682 étaient en fait une seule et même comète. Expliquant que la comète voyage sur une orbite elliptique, et prend 76 ans pour faire une révolution complète autour du Soleil, Halley prédit qu'elle reviendrait en 1758.
En 1301 Giotto observa très certainement le passage de la comète visible en Italie. Cette date coïncide avec la période pendant laquelle il réalisa son œuvre. Il s'inspira de la comète mobile dans le ciel étoilé, qui constituait peut-être une explication probable au passage de L'Évangile selon Matthieu, rapportant la question des mages au roi Hérode : « Où est le roi des Juifs qui vient de naître ? En effet,

nous avons vu son étoile en Orient et nous sommes venus pour l'adorer » puis explique que le souverain les envoie à Bethléem et que « l'étoile qu'ils avaient vue en Orient allait devant eux jusqu'au moment où, arrivée au-dessus de l'endroit où était le petit enfant, elle s'arrêta »

5. Tracer sur le document 2 la trajectoire de la Terre. On rappelle que la Terre se situe à 1 u.a. du Soleil. En utilisant les informations du document, indiquer la position de la comète et de la Terre à la date du 10 janvier 1986 à laquelle la photo de l'introduction a été effectuée. Déterminer la distance à laquelle se trouvait la Comète de la Terre.
Préciser sur le schéma le sens de rotation de la Terre autour du Soleil, ainsi que le sens de rotation de la Terre sur elle-même.



Position de la comète le 10/01/1986 :

Nombre de jours entre le 10/01 et le 09/02 : $31 - 10 + 9 = 30\ jours$

Les positions de la comète sont représentées tous les 7 jours. Le 10/01 correspond donc à $\frac{30}{7} = 4{,}3$ positions avant le périhélie.

Position de la Terre le 09/02/1986 : d'après le texte, à l'opposé de la comète qui est au périhélie par rapport au Soleil.

Le 10/01/1986, 30 jours avant cette date, la Terre est proche de la comète puisque celle-ci est visible à l'œil nu. La Terre a donc avancée entre le 10/01/1986 et le 09/02/1986 dans le sens des aiguilles d'une montre sur le schéma, soit dans le sens de rotation opposé de celui de la Comète. Si la Terre avançait dans l'autre sens, le 10/01/1986, elle serait aussi à l'opposé de la comète par rapport au Soleil et la comète ne serait pas visible côté « jour » de la Terre.

Calculons l'angle parcourue par la Terre sur son orbite entre le 10/01 et le 09/02 :

On sait que la Terre parcourt 1 tour complet (360°) en 1 année (365,25 jours)

Par proportionnalité :

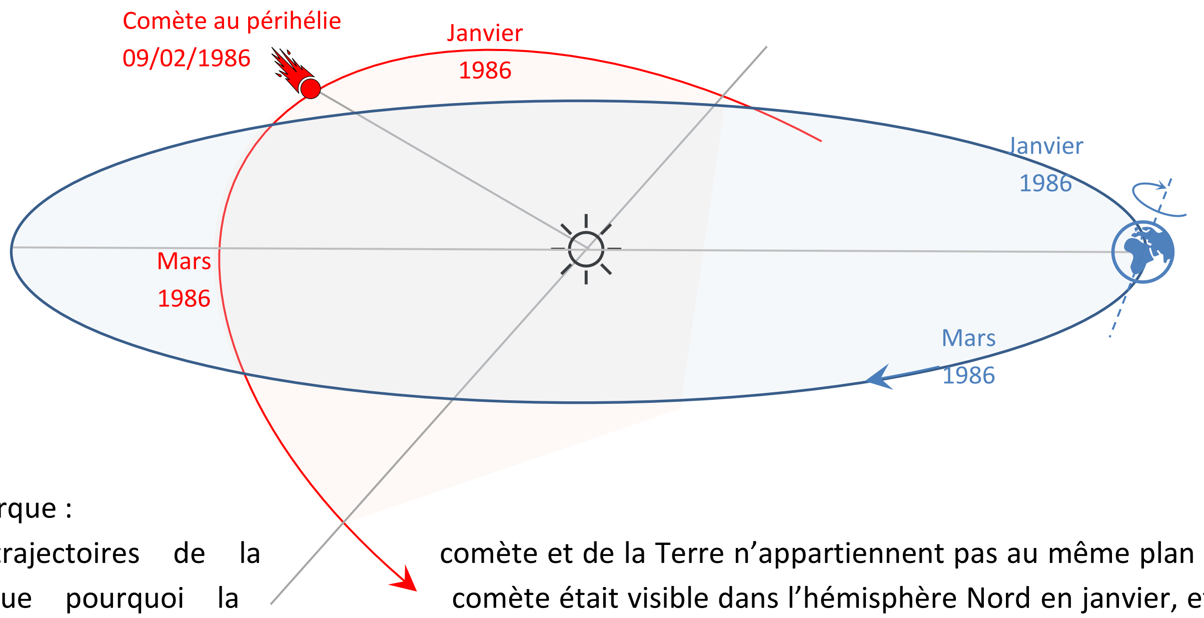
Durée (jours)	Angle (°)
365,25	360
30	α

$\alpha = \frac{30 \times 360}{365{,}25} = 29{,}6°$ soit environ 30°

Connaissant le sens de rotation de la Terre autour du Soleil et l'angle parcouru, on peut dessiner la position de la Terre le 10/01/1986.

Sens de rotation de la Terre autour de son axe :

Le 10/01, la comète était visible « dans le ciel du soir » selon les données de l'introduction. On en déduit le sens de rotation propre de la Terre tel qu'il est indiqué sur le schéma : les observateurs terrestres s'éloignent du Soleil (et de sa lumière) lorsqu'ils voient la comète.



Remarque :

les trajectoires de la comète et de la Terre n'appartiennent pas au même plan ce qui explique pourquoi la comète était visible dans l'hémisphère Nord en janvier, et dans l'hémisphère Sud en Mars, lorsque la Terre se rapproche à nouveau de la Comète, les sens de rotation des deux corps étant inverses.