Approche de la 2ème loi de Newton – Relation entre force et variation de vitesse

Les lois du mouvement de Newton ont été énoncées dans son ouvrage Philosophiae naturalis principia mathematica en 1687.
L'énoncé original de la deuxième loi de Newton est le suivant :
« Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice ; et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée. »

Voici interprétation mathématique de cette loi : $\sum \vec{F} = m\,.\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$

où $\sum \vec{F}$ correspond à la somme des forces qui s'appliquent au système
m correspond à la masse du système
$\overrightarrow{\Delta v}$ correspond à la variation du vecteur vitesse pendant une durée Δt

On veut vérifier la validité de cette loi dans le cas du mouvement d'un ballon de basket tiré par un joueur, depuis la ligne des 3 points.

Les positions du ballon ont été relevées image par image sur un document vidéo. La durée entre 2 images sur le document vidéo est $\tau = 80\ ms = 0{,}080\ s$.

Echelle du document :
1,0 cm sur l'image correspond à $\frac{1{,}0}{4}$ m dans la réalité.

I. Application de la 2ème loi de Newton au ballon :

Montrer qu'au cours du mouvement étudié, l'application de la 2ème loi de Newton conduit à : $\vec{g} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$

- Bilan des forces : $\vec{P} = m\,.\vec{g}$
- Application de la 2ème loi de Newton : $\vec{P} = m\,.\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$

  d'ù $m\,.\vec{g} = m\,.\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$

  soit $\vec{g} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$
- Rappeler les caractéristiques de $\vec{g}$:
  - direction : verticale
  - sens : vers le bas
  - intensité : $g = 9{,}8\ N.kg^{-1}$

II. Vérification de la validité de la loi par construction de vecteurs :

Pour vérifier la 2ème loi de Newton pour une position donnée, on doit :

- tracer $\overrightarrow{\Delta v}$ à la position étudiée
- déterminer la valeur Δv en mesurant la longueur de ce vecteur et calculer $\frac{\Delta v}{\Delta t}$
- comparer la direction, le sens et l'intensité de $\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$ à $\vec{g}$.

- **Cas de $\frac{\overrightarrow{\Delta v_8}}{\Delta t}$:**

1. Traçage du vecteur $\overrightarrow{\Delta v_8} = \overrightarrow{v_9} - \overrightarrow{v_7}$ au point M_8

a. Traçage du vecteur $\overrightarrow{v_9}$ au point M_8 ; Rappel : $v_9 = \frac{M_8M_{10}}{2\tau}$

- Mesurer M_8M_{10} en cm sur l'image

- Convertir M_8M_{10} en m dans la réalité en utilisant l'échelle et calculer $v_9 = \frac{M_8M_{10}}{2\tau}$

- Tracer $\overrightarrow{v_9}$ au point M_8 en utilisant l'échelle suivante : $1\, m.s^{-1} = 1cm$
  Remarque : la direction du vecteur $\overrightarrow{v_9}$ est celle de la droite passant par les points M_8 et M_{10}

b. Traçage du vecteur $\overrightarrow{v_7}$ au point M_8

- Mesurer M_6M_8 en cm sur l'image

- Convertir M_6M_8 en m dans la réalité en utilisant l'échelle et calculer $v_7 = \frac{M_6M_8}{2\tau}$

- Tracer $-\overrightarrow{v_7}$ au point M_8 en utilisant l'échelle suivante : $1\, m.s^{-1} = 1cm$
  Remarque : la direction du vecteur $-\overrightarrow{v_7}$ est celle de la droite passant par les points M_6 et M_8

c. Obtention de $\overrightarrow{\Delta v_8}$

- Traçage de la somme de vecteurs $\overrightarrow{\Delta v_8} = \overrightarrow{v_9} + (-\overrightarrow{v_7})$ en utilisant un compas

2. Détermination de $\frac{\Delta v_8}{\Delta t}$

- Mesure de la longueur du vecteur $\overrightarrow{\Delta v_8}$ en cm et convertir cette valeur en $m.s^{-1}$

- Calculer $\frac{\Delta v_8}{\Delta t}$

3. Comparer $\frac{\overrightarrow{\Delta v_8}}{\Delta t}$ à $\vec{g}$ et conclure quant à la vérification de la 2ème loi de Newton pour le mouvement de la balle de basket.

- **Cas de** $\frac{\overrightarrow{\Delta v_{12}}}{\Delta t}$: recommencer la démarche pour déterminer $\frac{\overrightarrow{\Delta v_{12}}}{\Delta t}$

III. Vérification de la loi par calcul des coordonnées du vecteur $\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$

En utilisant le tableur EXCEL, on va déterminer les coordonnées des vecteurs $\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}\left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\,;\frac{\Delta v_z}{\Delta t}\right)$ pour les différentes positions occupées par le ballon.

1. Expressions des coordonnées au n-ième point

Rappel mathématique : soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}u_x\\u_y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}u'_x\\u'_y\end{pmatrix}$.
Le vecteur $\overrightarrow{\Delta u} = \overrightarrow{u'} - \vec{u}$ se calcule de façon suivante : $\overrightarrow{\Delta u}\begin{pmatrix}u'_x - u_x\\u'_y - u_y\end{pmatrix}$
La norme du vecteur $\vec{u}$ se calcule de façon suivante : $u = \sqrt{u_x^2 + u_z^2}$

- En vous appuyant sur la méthode utilisée précédemment, donner les expressions de $\frac{\Delta v_{x_n}}{\Delta t}$ et $\frac{\Delta v_{z_n}}{\Delta t}$ pour le n-ième point :
$\frac{\Delta v_{x_n}}{\Delta t} = \frac{v_{x_{n+1}} - v_{x_{n-1}}}{2\tau}$ et $\frac{\Delta v_{z_n}}{\Delta t} = \frac{v_{z_{n+1}} - v_{z_{n-1}}}{2\tau}$

- Donner les expressions de v_{x_n} et v_{z_n} :
$v_{x_n} = \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\tau}$ et $v_{z_n} = \frac{z_{n+1} - z_{n-1}}{2\tau}$

- Donner l'expression de l'intensité du vecteur $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ à partir de ces coordonnées $\left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\,;\frac{\Delta v_z}{\Delta t}\right)$
$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v_z}{\Delta t}\right)^2}$

Conséquences :
- Pour calculer $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, il faut les coordonnées du vecteur $\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$ à chaque position
- pour calculer les coordonnées de $\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$, il faut les coordonnées de la vitesse $\vec{v}$ pour chaque position
- pour calculer les coordonnées de $\vec{v}$, il faut les coordonnées de chaque position $M(x\,;z)$

2. Méthode

- Choisir sur le document représentant la trajectoire, 2 axes perpendiculaires Oz et Ox qui seront les axes du repère

- Sur une feuille EXCEL, créer une colonne « n » (numéro des points) de 1 à 14

- Créer une colonne « t » dans laquelle sont indiquées les dates de chaque image (on rappelle que l'intervalle de temps entre 2 images est $\tau = 0{,}08\ s$)

- Créer 2 colonnes « x image » et « z image » dans lesquelles sont indiquées les coordonnées des positions du ballon sur l'image mesurée à la règle en cm (relevez d'abord tous les « x » puis tous les « z)

- Créer 2 colonnes « x (m) » et « z (m) » dans lesquelles sont calculées les coordonnées des positions du ballon dans la réalité (Rappel de l'échelle du document : $1{,}0\ cm \Leftrightarrow \frac{1{,}0}{4}\, m$)

- Créer 2 colonnes « Vx » et « Vz » dans lesquelles sont calculées les coordonnées de la vitesse en chaque point (attention, certaines vitesses ne peuvent être calculées…)

- Créer 2 colonnes « dVx/dt » et « dVz/dt » dans lesquelles sont calculées les coordonnées du vecteur $\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$.

- Créer une colonne « dv/dt » dans laquelle est calculée l'intensité du vecteur $\frac{\Delta v}{\Delta t}$

- Calculer au bas du tableau les moyennes $\frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \frac{\Delta v_z}{\Delta t}$ et $\frac{\Delta v}{\Delta t}$

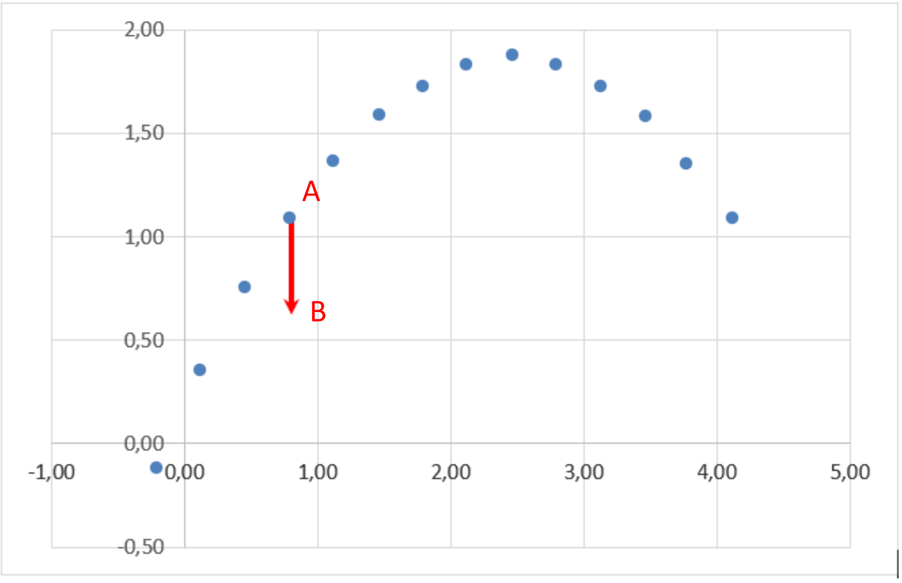
3. Interprétation des résultats :

A partir des valeurs calculées, justifier comme annoncé au début que $\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \vec{g}$

- La direction du vecteur $\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$ est bien verticale car $\frac{\Delta v_x}{\Delta t} \approx 0$
- Le sens du vecteur $\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$ est bien vers le bas car $\frac{\Delta v_z}{\Delta t} < 0$
- On a bien $\frac{\Delta v}{\Delta t} \approx g$

4. <u>Pour aller plus loin : traçage du vecteur $\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$ pour chaque position avec EXCEL</u>

- Pour tracer le vecteur $\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$, on va considérer que $\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \overrightarrow{AB}$



⇨ Le point A correspond à la position du ballon : $A\binom{x}{z}$

⇨ Le point B a pour coordonnées : $B\begin{pmatrix} x+\frac{\Delta v_x}{\Delta t} \\ z+\frac{\Delta v_z}{\Delta t} \end{pmatrix}$

Remarque : on a bien $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x+\frac{\Delta v_x}{\Delta t}-x=\frac{\Delta v_x}{\Delta t} \\ z+\frac{\Delta v_z}{\Delta t}-z=\frac{\Delta v_z}{\Delta t} \end{pmatrix} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$

- En dessous du tableau réalisé créer les cellules suivantes :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	n	**t (s)**	**x (cm)**	**z (cm)**	**x (m)**	**z (m)**	**Vx**	**Vz**	**dVx/dt**	**dVzdt**	dV/dt
2	1	0,00	-0,80	-0,50	-0,20	-0,13					
3	2	0,08	0,50	1,40	0,13	0,35	4,140625	5,46875			
4	3	0,16	1,85	3,00	0,46	0,75	4,21875	4,609375	-5,5511E-15	-10,2539063	10,2539063
5	4	0,24	3,20	4,35	0,80	1,09	4,140625	3,828125	0	-9,27734375	9,27734375
6	5	0,32	4,50	5,45	1,13	1,36	4,21875	3,125	0,48828125	-9,765625	9,77782441
7	6	0,40	5,90	6,35	1,48	1,59	4,21875	2,265625	-0,9765625	-10,2539063	10,3003043
8	7	0,48	7,20	6,90	1,80	1,73	4,0625	1,484375	0	-8,30078125	8,30078125
9	8	0,56	8,50	7,30	2,13	1,83	4,21875	0,9375	0,9765625	-9,27734375	9,32860018
10	9	0,64	9,90	7,50	2,48	1,88	4,21875	0	-0,48828125	-11,71875	11,7289181
11	10	0,72	11,20	7,30	2,80	1,83	4,140625	-0,9375	1,6653E-14	-9,765625	9,765625
12	11	0,80	12,55	6,90	3,14	1,73	4,21875	-1,5625	-0,9765625	-8,7890625	8,84314955
13	12	0,88	13,90	6,30	3,48	1,58	3,984375	-2,34375	-0,9765625	-9,27734375	9,32860018
14	13	0,96	15,10	5,40	3,78	1,35	4,0625	-3,046875			
15	14	1,04	16,50	4,35	4,13	1,09					
16									-0,1953125	-9,66796875	9,69050529
17		Vecteur									
18		à t=	0,24								
19			x	z							
20		A :									
21		B :									

- Dans la cellule correspondant à x_A, on demande à EXCEL de rechercher dans le tableau la valeur x_A pour la date « t = 0,24 » (date inscrite dans la cellule C18 dans mon cas). La formule utile est la suivante :
  =RECHERCHEV(AdresseValeurCherchée ; PlageDonnée; NuméroColonneValeurRenvoyée)
  Attention :
  - La valeur cherchée doit figurer dans la 1ère colonne de la plage
  - La valeur renvoyée doit figurer dans une des colonnes de la plage de donnée
  Ce qui donne dans le cas présenté : =RECHERCHEV($C$18;$B$2:$K$15;4)

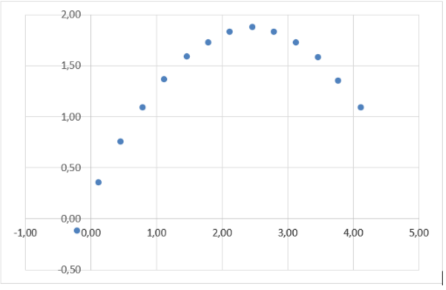
- Compléter z_A, x_B et z_B.

  Remarque : on fera calculer $x_B = x_A + \frac{RechercheV\ de\ \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\right)}{20}$ et $z_B = z_A + \frac{RechercheV\ de\ \left(\frac{\Delta v_z}{\Delta t}\right)}{20}$

  La division par 20 (ou par 10) permettra d'ajuster la longueur du vecteur à la taille du graphique

- Tracer le graphe représentant la trajectoire z en fonction de x :
  - sélectionner les valeurs des colonnes x et z
  - dans le menu insertion, choisir le graphique nuage de points ; n'afficher que les points

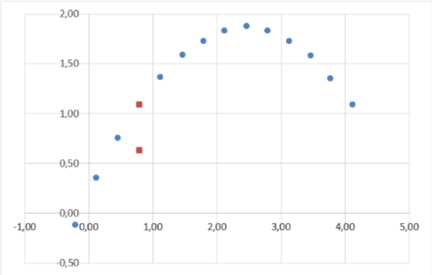
  On doit obtenir :



- Il s'agit maintenant d'insérer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur le même graphique :
  - Faire un clic droit sur le graphique ; dans le menu qui s'ouvre, choisir « Sélectionner des données »
  - Dans la fenêtre qui s'ouvre, choisir « Ajouter »
  - Dans la fenêtre qui s'ouvre cliquer sur l'icone « Sélectionner la plage » correspondant aux valeurs de la série des abscisses X, puis sélectionner la plage des deux cellules correspondant à x_A et x_B

    Faire la même chose avec les valeurs de la série des ordonnées Y.
  - Cliquer sur OK pour fermer les fenêtres.

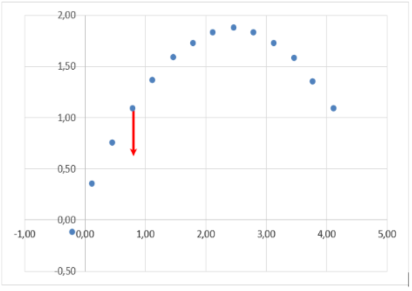
  On doit obtenir :



- Il s'agit maintenant de mettre en forme le bipoint pour faire apparaître le vecteur :
  - Faire un clic droit sur un des deux points correspondant au vecteur $\overrightarrow{AB}$; dans le menu qui s'ouvre, choisir « Mettre en forme une série de données »
  - Dans le menu qui s'ouvre à gauche de l'écran, choisir les options suivantes :
    - ⇨ Dans l'option « Courbe » :

      Trait plein

      Type de flèche finale : choisir une flèche
    - ⇨ Dans l'option « Marque » : Aucune marque



Il suffit de changer la valeur de « t » pour obtenir le vecteur $\overrightarrow{AB}$ à l'instant souhaité.