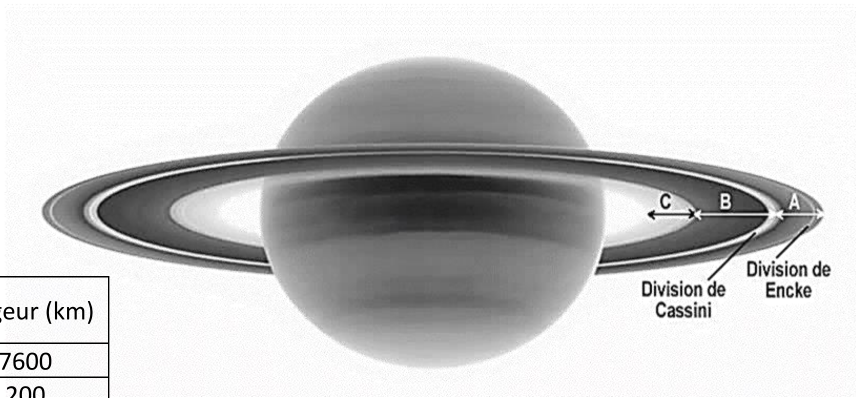
# Exercices interaction gravitationnelle

## I. Les anneaux de Saturne

Les anneaux de Saturne sont les anneaux planétaires les plus importants du Système solaire, situés autour de la géante gazeuse Saturne. Bien qu'ils semblent continus vus depuis la Terre, ils sont en fait constitués d'innombrables particules de glace (95 à 99 % de glace d'eau pure selon les analyses spectroscopiques) et de poussière dont la taille varie de quelques micromètres à quelques centaines de mètres ; ils ont chacun une orbite différente. Les anneaux forment un disque comportant plusieurs divisions de largeurs variées et dont l'épaisseur va de 2 à 10 mètres.
Une des théories proposée par Edouard Riche au XIXème siècle, attribue la formation des anneaux à la chute d'une lune géante. Lorsque la Lune atteignit une altitude limite, elle se serait disloquée sous l'effet de la gravitation de Saturne. Les questions qui suivent ont pour but d'expliquer comment les lois de la gravitation universelle permettent d'expliquer la dislocation de la lune de Saturne.

Données :
Masse de Saturne : $M_S = 5{,}7 \times 10^{26} kg$

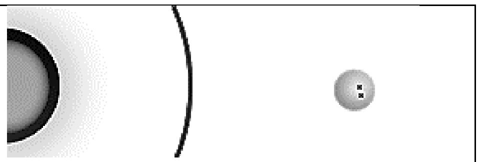
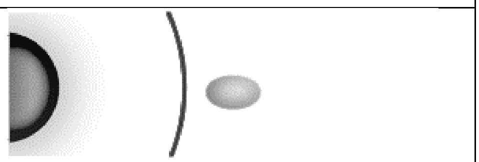
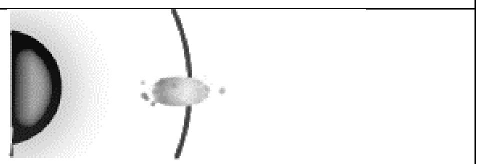
| **Satellites de Saturne :** | Distance (km) | Masse volumique ($kg.m^{-3}$) |
|---|---|---|
| Mimas | 186 000 | 1200 |
| Encelade | 238 000 | 1140 |
| Téthys | 295 000 | 1210 |
| Dioné | 377 000 | 142 |



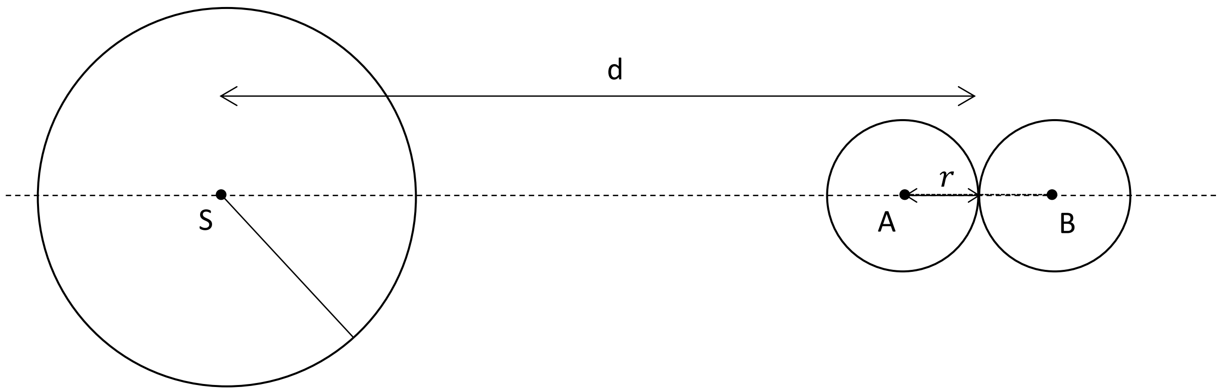

| **Anneaux de Saturne :** | Rayon interne (km) | Rayon externe (km) | Largeur (km) |
|---|---|---|---|
| Anneau D | 66900 | 74500 | 7600 |
| Division Guérin | | | 200 |
| Anneau C | 74700 | 92000 | 17300 |
| Division Maxwell | | | <10 |
| Anneau B | 92000 | 117600 | 25600 |
| Division de Cassini | | | 4600 |
| Anneau A | 122200 | 136800 | 14600 |

### 1. Détermination de la limite de Roche :

Document : ce que décrit le modèle de Roche :

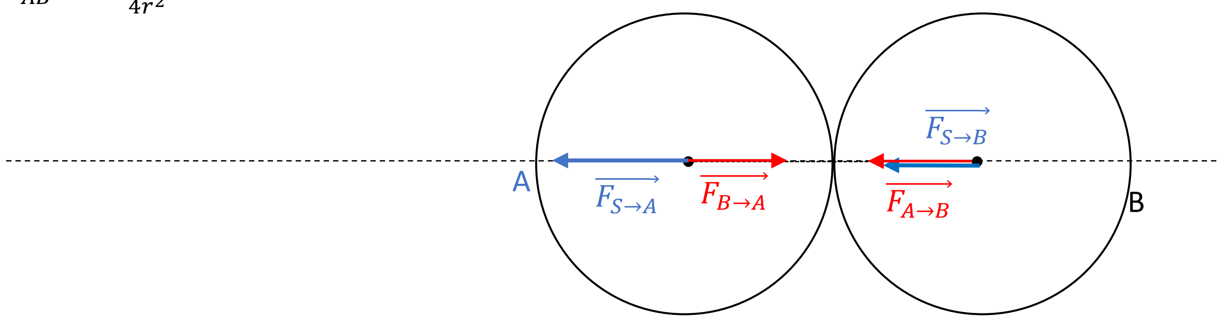
| | |
|---|---|
| Au-delà d'une certaine distance $d_0$ appelée « limite de Roche », la cohésion du satellite est maintenue par les forces de gravitation internes au satellite. |  |
| Lorsque le satellite se rapproche de la limite, il commence à être déformé sous l'effet de la différence entre les forces de gravitation exercées par l'astre attracteur sur ces différentes parties. |  |
| A partir de la distance $d_0$, la différence entre les forces de gravitations deviennent plus importantes que les forces de gravitation internes. |  |

On s'intéresse à deux particules en orbite circulaire supposée en contact l'une de l'autre. On modélise ces particules par deux sphères homogènes identiques de masse $m$ et de rayon $r$ telles que la distance de leurs centres A et B soit $AB = 2r$ (voir figure 1). Le centre de gravité G de l'ensemble des deux sphères tourne à une distance $d$ du centre S de Saturne. Les points S, A et B sont alignés.




a. Exprimer en fonction des paramètres utiles la valeur de la force d'attraction $F_{AB}$ qui s'exerce entre les sphères de centres A et B. Représenter les deux forces $\overrightarrow{F_{A\to B}}$ et $\overrightarrow{F_{B\to A}}$ modélisant cette interaction sur le schéma.

$F_{AB} = G.\frac{m^2}{4r^2}$




b. Les deux sphères sont attirées par Saturne par deux forces $\overrightarrow{F_{S\to A}}$ et $\overrightarrow{F_{S\to B}}$.
Donner l'expression des intensités $F_{S\to A}$ et $F_{S\to B}$. Identifier laquelle de ces deux forces est la plus grande.
Représenter ces deux forces sur le schéma.

$F_{S\to A} = G.\frac{M_S.m}{(d-r)^2}$ et $F_{S\to B} = G.\frac{M_S.m}{(d+r)^2}$

Si les corps A et B chutaient vers Saturne sous le seul effet de ces deux forces, comment évoluerait la distance entre A et B au cours de leur chute ?

Comme $F_{S\to A} > F_{S\to B}$, A est plus attiré par Saturne que B (puisque plus proche). La distance entre A et B devrait donc augmenter.

c. La force de gravitation qui s'exerce sur chaque sphère est la somme vectorielle de la force de gravitation créée par Sature et de la fore de gravitation créée par l'autre sphère. Mathématiquement $\overrightarrow{F_{tot_A}} = \overrightarrow{F_{S\to A}} + \overrightarrow{F_{B\to A}}$ et $\overrightarrow{F_{tot_B}} = \overrightarrow{F_{S\to B}} + \overrightarrow{F_{A\to B}}$
Montrer que :
$F_{tot_A} = G.m.\left(\frac{M_S}{(d-r)^2} - \frac{m}{4r^2}\right)$ et $F_{tot_B} = G.m.\left(\frac{M_S}{(d+r)^2} + \frac{m}{4r^2}\right)$

Comme les forces qui s'exercent sur A sont opposées l'une à l'autre : $F_{tot_A} = F_{S\to A} - F_{AB}$
Comme les forces qui s'exercent sur B sont dans le même sens : $F_{tot_B} = F_{S\to B} + F_{AB}$

d. Quelle condition sur $F_{tot_A}$ et $F_{tot_B}$ permet de prévoir la séparation des deux sphères.

Pour qu'il y ait séparation, il faut que $F_{tot_A} > F_{tot_B}$.

e. En réalité, il faut tenir compte d'une force supplémentaire : la force d'inertie due au mouvement circulaire des deux particules. En tenant compte de cette force, on peut exprimer la distance à partir de laquelle $F_{tot_A} > F_{tot_B}$ est notée $d_0$ et est appelée « limite de Roche » : $d_0^3 = 12 \,.\frac{M_S \,.\, r^3}{m}$
Exprimer la limite de Roche en fonction de la masse volumique des particules.
Rappel : Masse volumique $\rho = \frac{m}{V}$ Volume d'une sphère : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Masse des particules : $m = \rho \,.\, V = \rho \,.\frac{4}{3}\pi r^3$

d'où $d_0^3 = 12 \,.\frac{M_S . r^3}{\rho \,.\, \frac{4}{3}\pi r^3}$

Soit $d_0^3 = 2{,}9 \,.\frac{M_S}{\rho}$

f. Comment évolue la limite de Roche en fonction de la masse volumique ?

Plus la masse volumique augmente, plus la limite de Roche est faible.
Les anneaux les plus proches (D et C) sont constitués de matière plus dense que les anneaux éloignés (A).

g. Justifier par un calcul l'existence du satellite Mimas.

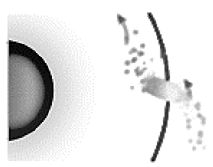
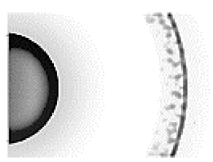
Calculons la limite de Roche pour la masse volumique du satellite Mimas :

$$d_0 = \left(2{,}9 \times \frac{5{,}7 \times 10^{26}}{1200}\right)^{\frac{1}{3}} = 1{,}11 \times 10^5 km$$

La limite de Roche pour le satellite Mimas est de 111 000 km ce qui est inférieure à l'orbite réelle de Mimas. Le satellite existe sans se disloquer.

2. Séparation des débris :

Document : ce que décrit le modèle de Roche :

| | |
|---|---|
| Sous l'effet de la troisième loi de Képler, les débris engendrés par la dislocation se séparent. |  |
| Les débris une fois séparés forment un anneau. |  |

a. La vitesse d'un satellite sur son orbite est donnée par la relation : $v = \sqrt{\frac{G.M_S}{R}}$ où $R$ est le rayon de l'orbite du satellite.

Pour photographier Saturne très peu lumineux, les télescopes terrestres équipés de caméra utilisent des temps de pose d'environ 0,5 s.
Déterminer la distance que parcourent les débris situés sur la limite externe de l'anneau A pendant ce temps de pose ?
Interpréter l'apparence des anneaux sur la photo.

$v = \sqrt{\frac{6,67\times10^{-11}\times5,7\times10^{27}}{136800\times10^{3}}} = 5,3\times10^{4} m.s^{-1}$

Distance parcourue pendant 0,5s : $D = v.\Delta t$  A.N.  $D = 2,6\times10^{4}m = 26\ km$

Les particules ne sont pas vues comme des points sur la photo mais comme des segments. La multiplication de ces segments pour chaque particule donne l'impression d'un anneau solide.

b. Montrer que l'expression de la vitesse donnée en a. permet de confirmer la 3ème loi de Képler qui lie la période du satellite $T$ au rayon de son orbite de façon suivante : $T^2 = k\,.R^3$
Déterminer l'expression de $k$.

$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{G.M_S}{R}}}$  soit  $T^2 = (4\pi^2R^2)\times\frac{R}{G.M_S} = \frac{4\pi^2R^3}{G.M_S} = \frac{4\pi^2}{G.M_S}.R^3$

Par analogie : $k = \frac{4\pi^2}{G.M_S}$

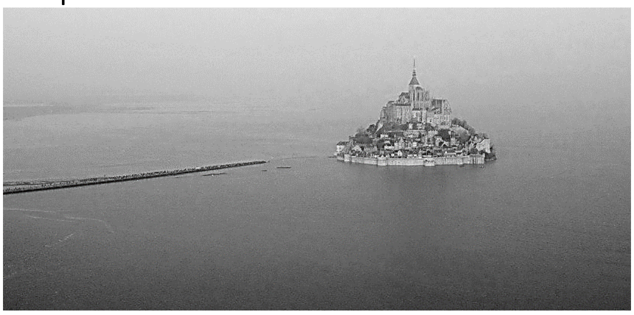
c. Montrer que la 3ème loi de Képler permet d'expliquer la séparation des débris de dislocation.

Pour tous les satellites de saturne, la constante de proportionnalité est la même.
Si on prend deux débris situés à des orbites différentes telles que $R_1 > R_2$, d'après la loi de Képler, $T_1 > T_2$.
Conséquence : le débris le plus proche de la planète Saturne (2) a une période de rotation inférieure et donc une vitesse supérieure.
Les deux débris se séparent.

## II. Les marées :

La marée est la variation de la hauteur du niveau des mers et des océans, causée par l'effet conjugué des forces de gravitation dues à la Lune et au Soleil.

Exemple : Mont Saint-Michel



| Date | Heure | Hauteur | Coeff. |
|---|---|---|---|
| Mar. 17/11/2020 | 03h12<br>08h15 PM<br>15h34<br>20h38 PM | 1,07m<br>13,88m<br>1,15m<br>13,60m | 105<br><br>101 |
| Mer. 18/11/2020 | 03h52<br>08h57 PM | 1,58m<br>13,40m | 96 |

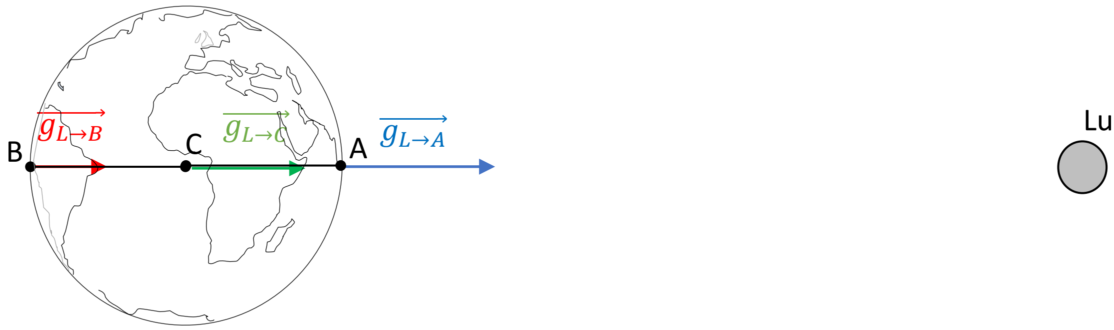
En France, l'ampleur de la marée par rapport à sa valeur moyenne est indiquée par le coefficient de la marée, exprimé en centièmes, qui prend une valeur comprise entre 20 et 120.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 16h15<br>21h21 PM | 1,70m<br>12,88m | 89 |

Exemple : pour le dimanche 15 novembre 2020 dans la baie du Mont-Saint-Michel (Source : [http://maree.info](http://maree.info))

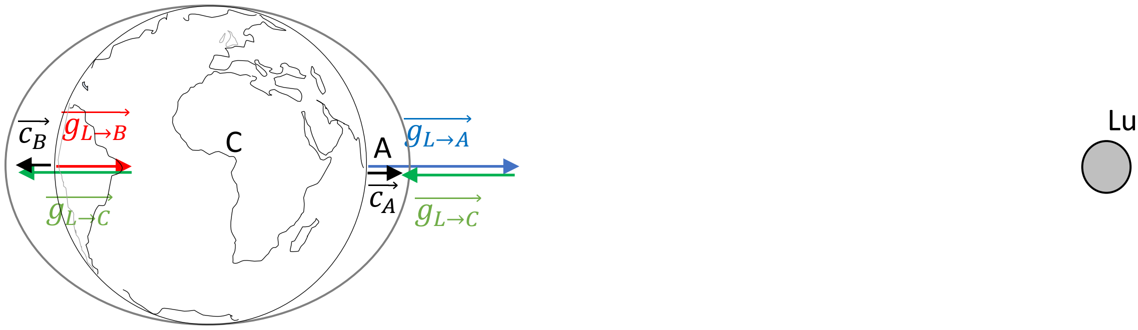
Données :
$M_T = 5{,}98\times10^{22}$ kg $M_L=7{,}34.10^{22}$kg $M_S = 1{,}99\times10^{30}$ kg
Distance centre de la Lune – centre de la Terre : $d = 3{,}84\times10^5$ km
Distance centre du Soleil – centre de la Terre : $D = 1{,}50\times10^8$ km
Rayon de la Terre : $R_T = 6{,}38\times10^3$ km
Période de rotation propre de la Terre : $T_T$ = 24h
Période de rotation de la Lune autour de la Terre : $T_L$ = 28j

1. Montrer que la Lune exercice un champ différent aux points A, B et C de la Terre.
   Représenter ces champs sur le schéma.
   $g_{L_A} = G\,.\frac{M_L}{(d-R_T)^2}$
   $g_{L_B} = G.\frac{M_L}{(d+R_T)^2}$
   $g_{L_C} = G.\frac{M_L}{d^2}$
   Classement : $g_{L_A} > g_{L_C} > g_{L_B}$




2. De ces champs résultent une attraction différentielle qui déforme la Terre. Cette déformation engendre marées. Le but de cette question est de définir la forme du « bourrelet » de marées autour de la Terre.

   On définit le champ de marée en un point P de façon suivante : $\overrightarrow{c_P} = \overrightarrow{g_P} - \overrightarrow{g_C}$
   Le sens et la direction de ce champ donne le sens et la direction de la déformation à l'origine du bourrelet de marées.
   Dessiner sur le schéma ci-dessous les sens les directions des champs de marée $\overrightarrow{c_A}$ et $\overrightarrow{c_B}$.
   En déduire la forme du bourrelet de marée.



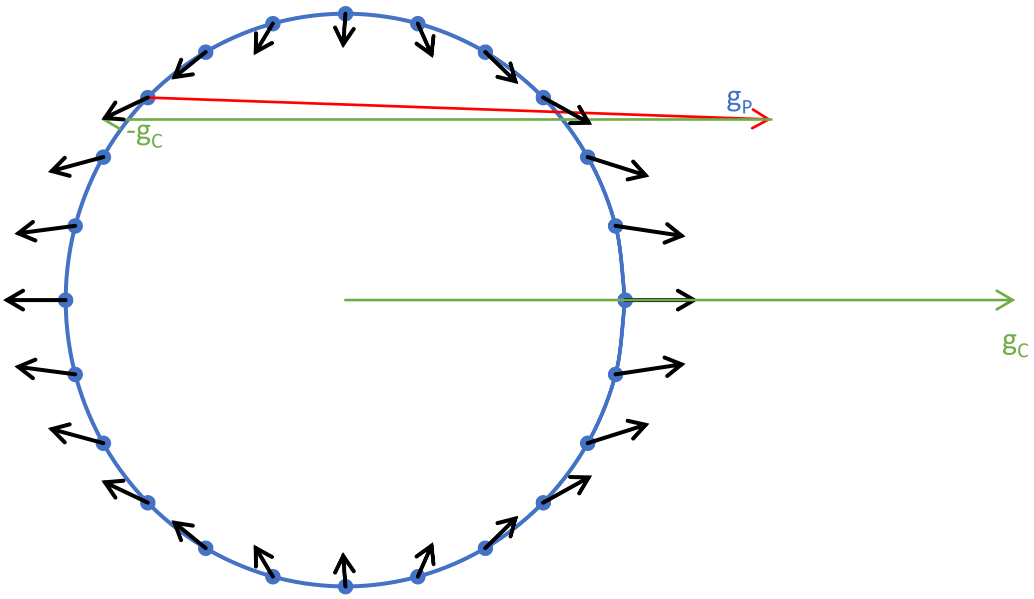

La Terre est « étirée » selon l'axe Terre- Lune.

Exprimer l'intensité des champs de marée aux points A et B en fonction $G$, $M_L$, $d$ et $R_T$

$c_A = g_A - g_C = G.\frac{M_L}{(d-R_T)^2} - G.\frac{M_L}{d^2} = G.M_L.\left(\frac{1}{(d-R_T)^2} - \frac{1}{d^2}\right)$

$c_B = g_C - g_B = G.\frac{M_L}{d^2} - G.\frac{M_L}{(d+R_T)^2} = G.M_L.\left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{(d+R_T)^2}\right)$

Remarque : sur le graphique ci-dessous sont représentés les champs de marées en différents points P de la Terre. En chacun de ces points, on a : $\overrightarrow{c_P} = \overrightarrow{g_P} - \overrightarrow{g_C}$ (déterminé graphiquement ci-dessous).




3. Dans le cas où $R_T \ll d$ (le rayon de la Terre est très petit devant la distance $d$), on admet les approximations suivantes (démonstration mathématique hors programme) :
   $\frac{1}{(d-R_T)^2} = \frac{1}{d^2}.\left(1 + \frac{2R_T}{d}\right)$ et $\frac{1}{(d+R_T)^2} = \frac{1}{d^2}.\left(1 - \frac{2R_T}{d}\right)$
   Montrer qu'en tenant compte de ces approximations $c_A = c_B$.
   Calculer la valeur du champ de marée.
   $c_A = G.M_L.\left(\frac{1}{(d-R_T)^2} - \frac{1}{d^2}\right) = G.M_L.\left(\frac{1}{d^2}.\left(1 + \frac{2R_T}{d}\right) - \frac{1}{d^2}\right) = G.M_L.\left(\frac{2R_T}{d^3}\right)$
   $c_B = g_C - g_B = G.\frac{M_L}{d^2} - G.\frac{M_L}{(d+R_T)^2} = G.M_L.\left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{d^2}.\left(1 - \frac{2R_T}{d}\right)\right) = G.M_L.\left(\frac{2R_T}{d^3}\right)$
   On a bien $c_A = c_B$

   A.N. $c_A = c_B = \frac{6.67\times10^{-11}\times7,34\times10^{22}\times2\times6,380\times10^{6}}{(3,84\times10^{8})^3} = 1,10 \times 10^{-6} N.kg^{-1}$

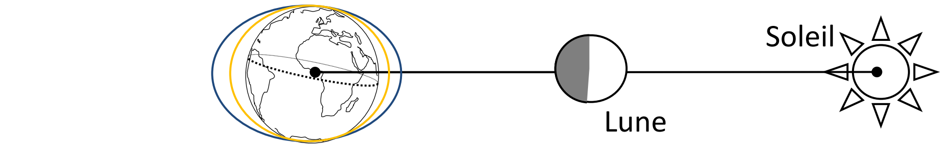
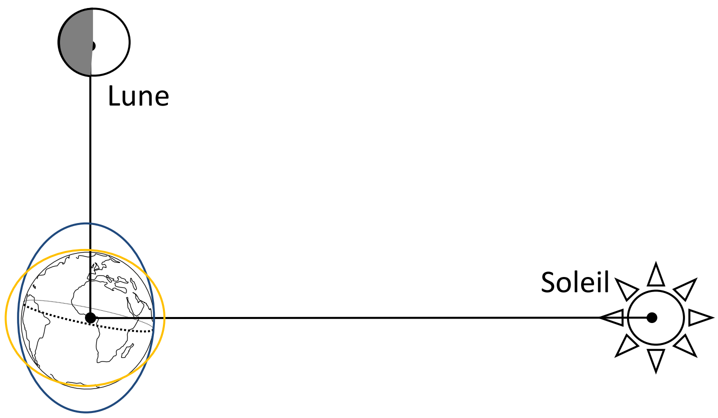
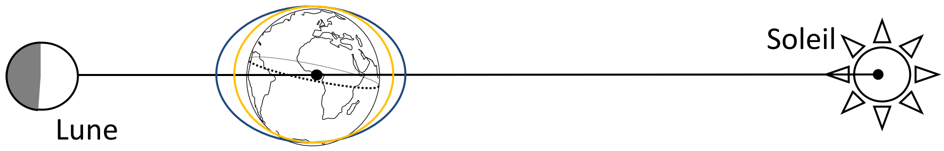
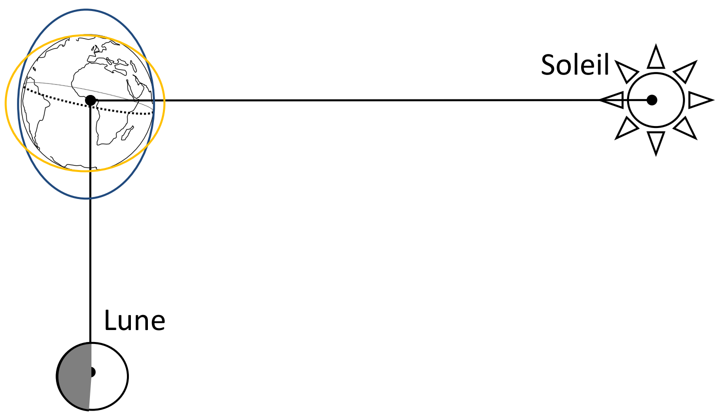
4. L'interaction gravitationnelle avec le Soleil engendre aussi l'existence de marées. Montrer par un calcul que le bourrelet qui en résulte est moins important que celui engendré par la Lune.

   Calculons le champ de marée dû au Soleil :
   $C_S = G.M_S.\left(\frac{2R_T}{D^3}\right)$
   A.N. C$= \frac{6.67\times10^{-11}\times1,99\times10^{30}\times2\times6,380\times10^{6}}{(1,50\times10^{11})^3} = 5,02 \times 10^{-7} N.kg^{-1}$
   $\frac{c_L}{c_S} = 2$
   Le champ de marée due au Soleil est environ deux fois moins important que celui engendré par la Lune.

5. Justifier la durée entre 2 marées successives de pleine mer (PM).

La périodicité des marées résulte de la rotation propre de la Terre autour de son axe. Un point de la surface de la terre parcourt 360° en 24h. Les marées de PM étant éloignées d’un angle de 180°, la durée qui s’écoule entre 2 marées successives de pleine mer est de 12h00

6. Sur les documents suivants, dessiner les bourrelets de marées aux différentes dates du mois lunaire. Indiquer le jour du mois lunaire, la phase de la Lune. Préciser si le coefficient est élevé ou faible en justifiant.

| | |
|---|---|
|  | Jour : 1<br><br>Lune : Nouvelle<br><br>Coefficient : Max |
|  | Jour : 7<br><br>Lune : Premier Croissant<br><br>Coefficient : Min |
|  | Jour : 14<br><br>Lune : Pleine Lune<br><br>Coefficient : Max |
|  | Jour : 21<br><br>Lune : Dernier Croissant<br><br>Coefficient : Min |