

Exercices interaction gravitationnelle

I. Les anneaux de Saturne

Les anneaux de Saturne sont les anneaux planétaires les plus importants du Système solaire, situés autour de la géante gazeuse Saturne. Bien qu'ils semblent continus vus depuis la Terre, ils sont en fait constitués d'innombrables particules de glace (95 à 99 % de glace d'eau pure selon les analyses spectroscopiques) et de poussière dont la taille varie de quelques micromètres à quelques centaines de mètres ; ils ont chacun une orbite différente. Les anneaux forment un disque comportant plusieurs divisions de largeurs variées et dont l'épaisseur va de 2 à 10 mètres.

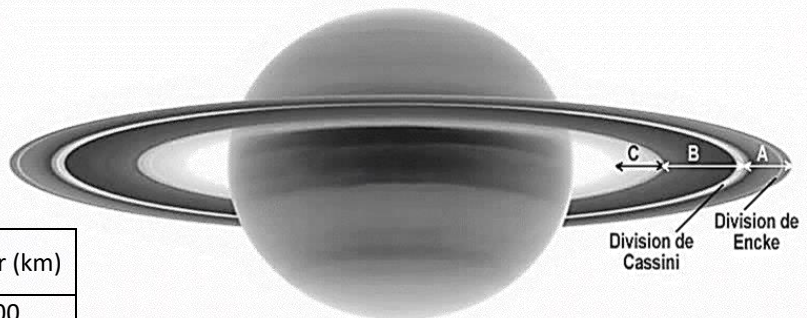
Une des théories proposée par Edouard Riche au XIX^{ème} siècle, attribue la formation des anneaux à la chute d'une lune géante. Lorsque la Lune atteignit une altitude limite, elle se serait disloquée sous l'effet de la gravitation de Saturne. Les questions qui suivent ont pour but d'expliquer comment les lois de la gravitation universelle permettent d'expliquer la dislocation de la lune de Saturne.

Données :

Masse de Saturne : $M_S = 5,7 \times 10^{26} \text{ kg}$

Satellites de Saturne :	Distance (km)	Masse volumique ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)
Mimas	186 000	1200
Encelade	238 000	1140
Téthys	295 000	1210
Dioné	377 000	142

Anneaux de Saturne :	Rayon interne (km)	Rayon externe (km)	Largeur (km)
Anneau D	66900	74500	7600
Division Guérin			200
Anneau C	74700	92000	17300
Division Maxwell			<10
Anneau B	92000	117600	25600
Division de Cassini			4600
Anneau A	122200	136800	14600

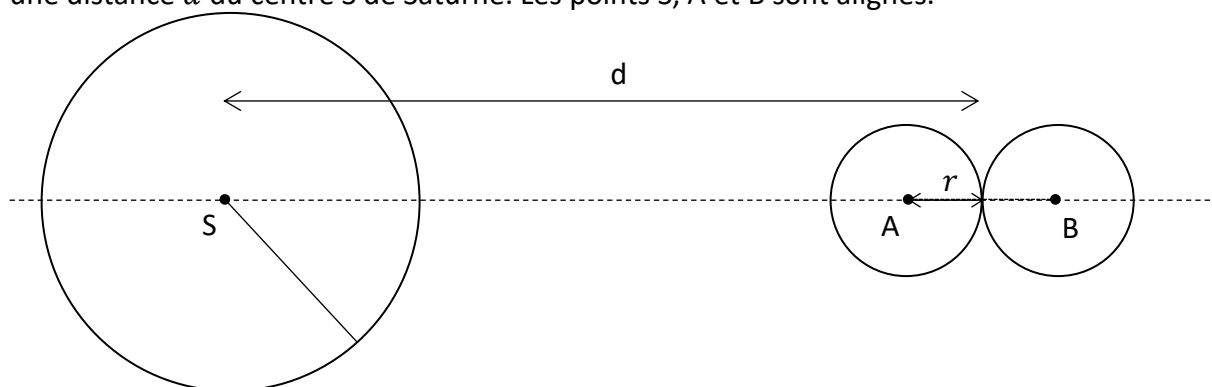


1. Détermination de la limite de Roche :

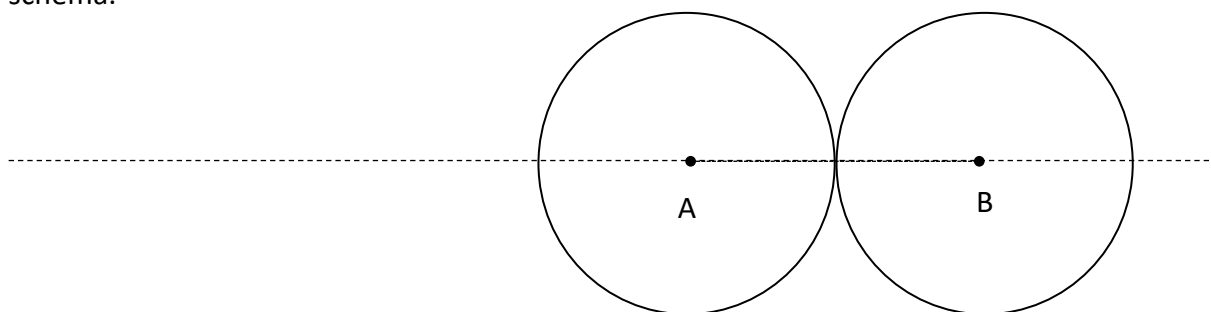
Document : ce que décrit le modèle de Roche :

<p>Au-delà d'une certaine distance d_0 appelée « limite de Roche », la cohésion du satellite est maintenue par les forces de gravitation internes au satellite.</p>	
<p>Lorsque le satellite se rapproche de la limite, il commence à être déformé sous l'effet de la différence entre les forces de gravitation exercées par l'astre attracteur sur ces différentes parties.</p>	
<p>A partir de la distance d_0, la différence entre les forces de gravitations deviennent plus importantes que les forces de gravitation internes.</p>	

On s'intéresse à deux particules en orbite circulaire supposée en contact l'une de l'autre. On modélise ces particules par deux sphères homogènes identiques de masse m et de rayon r telles que la distance de leurs centres A et B soit $AB = 2r$ (voir figure 1). Le centre de gravité G de l'ensemble des deux sphères tourne à une distance d du centre S de Saturne. Les points S, A et B sont alignés.



- a. Exprimer en fonction des paramètres utiles la valeur de la force d'attraction F_{AB} qui s'exerce entre les sphères de centres A et B. Représenter les deux forces $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ et $\vec{F}_{B \rightarrow A}$ modélisant cette interaction sur le schéma.



- b. Les deux sphères sont attirées par Saturne par deux forces $\vec{F}_{S \rightarrow A}$ et $\vec{F}_{S \rightarrow B}$. Donner l'expression des intensités $F_{S \rightarrow A}$ et $F_{S \rightarrow B}$. Identifier laquelle de ces deux forces est la plus grande. Représenter ces deux forces sur le schéma.

Si les corps A et B chutaient vers Saturne sous le seul effet de ces deux forces, comment évoluerait la distance entre A et B au cours de leur chute ?

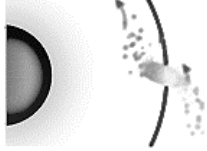
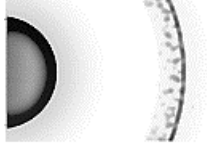
- c. La force de gravitation qui s'exerce sur chaque sphère est la somme vectorielle de la force de gravitation créée par Saturne et de la force de gravitation créée par l'autre sphère. Mathématiquement $\vec{F}_{totA} = \vec{F}_{S \rightarrow A} + \vec{F}_{B \rightarrow A}$ et $\vec{F}_{totB} = \vec{F}_{S \rightarrow B} + \vec{F}_{A \rightarrow B}$.
Montrer que :

$$F_{totA} = G \cdot m \cdot \left(\frac{M_S}{(d-r)^2} - \frac{m}{4r^2} \right) \text{ et } F_{totB} = G \cdot m \cdot \left(\frac{M_S}{(d+r)^2} + \frac{m}{4r^2} \right)$$

- d. Quelle condition sur F_{totA} et F_{totB} permet de prévoir la séparation des deux sphères.
- e. En réalité, il faut tenir compte d'une force supplémentaire : la force d'inertie due au mouvement circulaire des deux particules. En tenant compte de cette force, on peut exprimer la distance à partir de laquelle $F_{totA} > F_{totB}$ est notée d_0 et est appelée « limite de Roche » : $d_0^3 = 12 \cdot \frac{M_S \cdot r^3}{m}$.
Exprimer la limite de Roche en fonction de la masse volumique des particules.
Rappel : Masse volumique $\rho = \frac{m}{V}$ Volume d'une sphère : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.
- f. Comment évolue la limite de Roche en fonction de la masse volumique ?
- g. Justifier par un calcul l'existence du satellite Mimas.

2. Séparation des débris :

Document : ce que décrit le modèle de Roche :

<p>Sous l'effet de la troisième loi de Képler, les débris engendrés par la dislocation se séparent.</p>	
<p>Les débris une fois séparés forment un anneau.</p>	

- a. La vitesse d'un satellite sur son orbite est donnée par la relation : $v = \sqrt{\frac{G.M_S}{R}}$ où R est le rayon de l'orbite du satellite.
 Pour photographier Saturne très peu lumineux, les télescopes terrestres équipés de caméra utilisent des temps de pose d'environ 0,5 s.
 Déterminer la distance que parcourent les débris situés sur la limite externe de l'anneau A pendant ce temps de pose ?
 Interpréter l'apparence des anneaux sur la photo.
- b. Montrer que l'expression de la vitesse donnée en a. permet de confirmer la 3^{ème} loi de Képler qui lie la période du satellite T au rayon de son orbite de façon suivante : $T^2 = k \cdot R^3$
 Déterminer l'expression de k .
- c. Montrer que la 3^{ème} loi de Képler permet d'expliquer la séparation des débris de dislocation.

II. Les marées :

La marée est la variation de la hauteur du niveau des mers et des océans, causée par l'effet conjugué des forces de gravitation dues à la Lune et au Soleil.

Exemple : Mont Saint-Michel



En France, l'ampleur de la marée par rapport à sa valeur moyenne est indiquée par le coefficient de la marée, exprimé en centièmes, qui prend une valeur comprise entre 20 et 120.

Exemple : pour le dimanche 15 novembre 2020 dans la baie du Mont-Saint-Michel
 (Source : <http://maree.info>)

Date	Heure	Hauteur	Coeff.
Mar. 17/11/2020	03h12	1,07m	105
	08h15 PM	13,88m	
	15h34	1,15m	
	20h38 PM	13,60m	
Mer. 18/11/2020	03h52	1,58m	96
	08h57 PM	13,40m	
	16h15	1,70m	
	21h21 PM	12,88m	

Données :

$$M_T = 5,98 \times 10^{22} \text{ kg}$$

$$M_L = 7,34 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

$$M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$$

Distance centre de la Lune – centre de la Terre : $d = 3,84 \times 10^5$ km

Distance centre du Soleil – centre de la Terre : $D = 1,50 \times 10^8$ km

Rayon de la Terre : $R_T = 6,38 \times 10^3$ km

Période de rotation propre de la Terre : $T_T = 24$ h

Période de rotation de la Lune autour de la Terre : $T_L = 28$ j

1. Montrer que la Lune exerce un champ différent aux points A, B et C de la Terre.
Représenter ces champs sur le schéma.



2. De ces champs résultent une attraction différentielle qui déforme la Terre. Cette déformation engendre marées. Le but de cette question est de définir la forme du « bourrelet » de marées autour de la Terre.

On définit le champ de marée en un point P de façon suivante : $\vec{c}_P = \vec{g}_P - \vec{g}_C$

Le sens et la direction de ce champ donne le sens et la direction de la déformation à l'origine du bourrelet de marées.

Dessiner sur le schéma ci-dessous les champs de marée \vec{c}_A et \vec{c}_B (sens et direction à déterminer).

En déduire la forme du bourrelet de marée.



3. Exprimer l'intensité des champs de marée aux points A et B en fonction G , M_L , d et R_T

Dans le cas où $R_T \ll d$ (le rayon de la Terre est très petit devant la distance d), on admet les approximations suivantes (démonstration mathématique hors programme) :

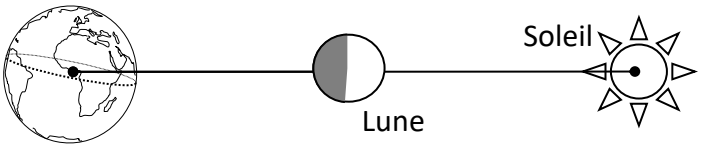
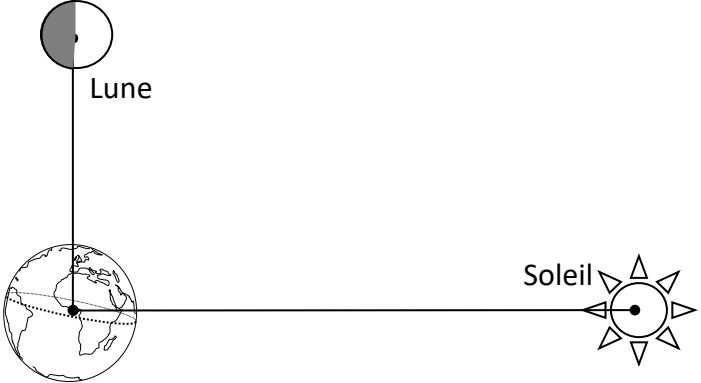
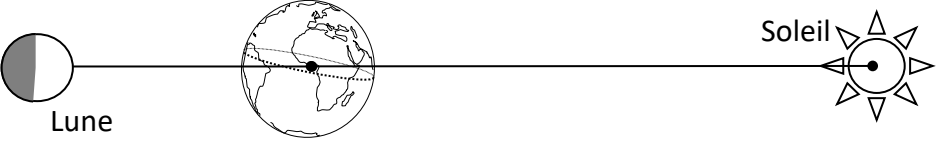
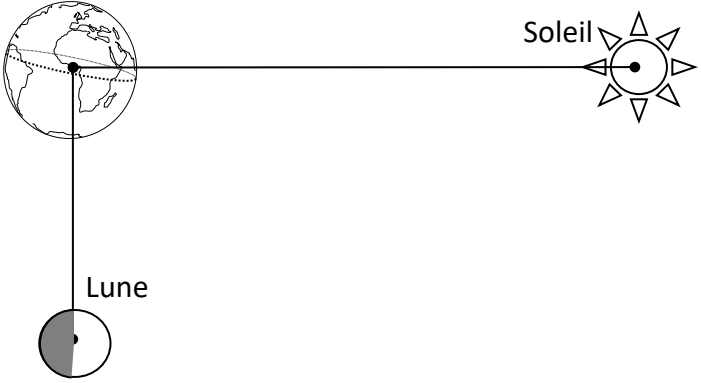
$$\frac{1}{(d-R_T)^2} = \frac{1}{d^2} \cdot \left(1 + \frac{2R_T}{d}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{(d+R_T)^2} = \frac{1}{d^2} \cdot \left(1 - \frac{2R_T}{d}\right)$$

Montrer qu'en tenant compte de ces approximations $c_A = c_B$.

Calculer la valeur du champ de marée.

4. L'interaction gravitationnelle avec le Soleil engendre aussi l'existence de marées. Montrer par un calcul que le bourrelet qui en résulte est moins important que celui engendré par la Lune.
5. Justifier la durée entre 2 marées successives de pleine mer (PM).

6. Sur les documents suivants, dessiner les bourrelets de marées aux différentes dates du mois lunaire. Indiquer le jour du mois lunaire, la phase de la Lune. Préciser si le coefficient est élevé ou faible en justifiant.

	<p>Jour : 1</p> <p>Lune :</p> <p>Coefficient :</p>
	<p>Jour :</p> <p>Lune :</p> <p>Coefficient :</p>
	<p>Jour :</p> <p>Lune :</p> <p>Coefficient :</p>
	<p>Jour :</p> <p>Lune :</p> <p>Coefficient :</p>