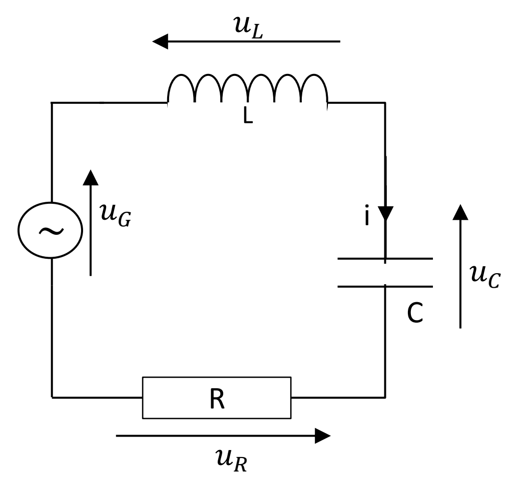
Oscillations forcées dans un circuit RLC : étude des tensions et de leur déphasage



Relations trigonométriques utiles à ce cours :

$$\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$-\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

A un instant t, l'intensité du courant est la même en tout point du circuit.
Soit i cette intensité :

$i = I_m \,.\sin(\omega.t)$ avec $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi.f$

Expression de la tension aux bornes du conducteur ohmique :

$u_R = R\,.i = R.I_m\,.\sin\,(\omega.t)$

Expression de la tension aux bornes de la bobine supposée idéale ($r = 0$) :

$u_L = L\,.\frac{di}{dt} = R\,.I_m\,.\omega\,.\cos(\omega.t)$

soit, avec les relations trigonométriques

$u_L = R\,.I_m\,.\omega\,.\sin\left(\omega.t + \frac{\pi}{2}\right)$

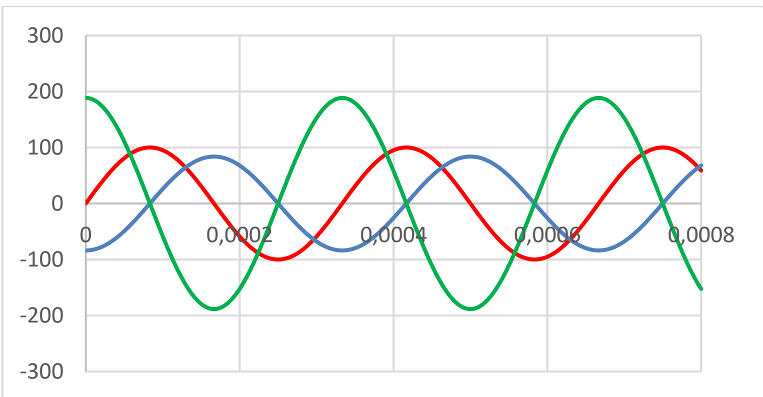
On constate que : u_L est en avance de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à i

Expression de la tension aux bornes du condensateurs :

$u_C = \frac{q}{C}$ or $i = \frac{dq}{dt}$ donc $q = -\frac{I_m}{\omega}\,.cos\,(\omega.t)$ (constante d'intégration nulle…)

$u_C = -\frac{I_m}{C\,.\omega}\,.\cos\,(\omega.t)$ soit $u_C = \frac{I_m}{C\,.\omega}\,.\sin\,(\omega.t - \frac{\pi}{2})$

On constate que : u_C est en retard de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à i



Tension aux bornes du générateur :

$u_G = u_R + u_C + u_L$

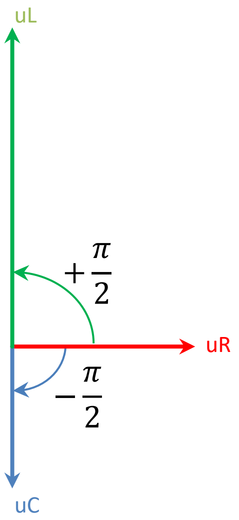
u_G est la somme de 3 tensions sinusoïdales de même fréquence, mais qui ne sont pas en phase.

u_G est de la forme : $u_G = U_m . \sin(\omega . t + \varphi)$

Il s'agit de trouver l'expression de U_m et de φ.

Méthode des vecteurs de Fresnel :

On associe à chaque tension, un vecteur « tournant », dont la norme est égale à l'amplitude de la tension. Le déphasage des tensions est représenté par l'angle existant entre ces vecteurs :

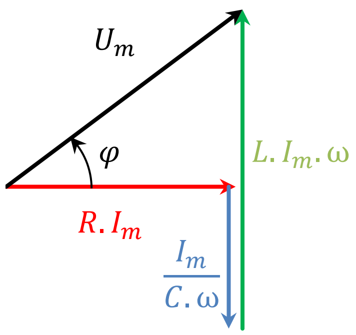


Le vecteur u_R a pour norme $R . I_m$

Le vecteur u_L a pour norme $L . I_m . \omega$

Le vecteur u_C a pour norme $\frac{I_m}{C.\omega}$

Remarque : seules les normes de u_C et u_L dépendent de ω et donc de f, la fréquence imposée par le générateur.



Pour obtenir le vecteur représentant la tension $u_G = U_m . \sin(\omega . t + \varphi)$, on fait la somme des vecteurs représentant les 3 autres tensions.

Calcul de U_m :

On utilise le théorème de Pythagore :

$$U_m = \sqrt{(R.I_m)^2 + \left(L.I_m.\omega - \frac{I_m}{C.\omega}\right)^2}$$

$$U_m = I_m . \sqrt{R^2 + \left(L.\omega - \frac{1}{C.\omega}\right)^2}$$

On appelle impédance Z du circuit (R, L, C) le terme suivant :

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \left(L.\omega - \frac{1}{C.\omega}\right)^2}$$

Calcul du déphasage φ :

$$\tan\varphi = \frac{L.I_m.\omega - \frac{I_m}{C.\omega}}{R.I_m} = \frac{L.\omega - \frac{1}{C.\omega}}{R}$$

Rapport entre représentation de Fresnel et tensions : on fait tourner les vecteurs à la même vitesse ω