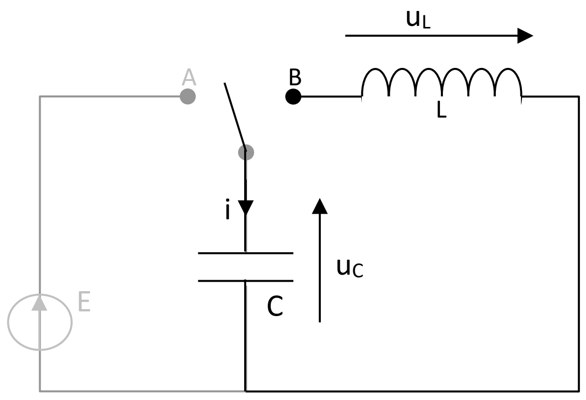
Oscillations électriques : Circuit R,L,C

I. Cas du circuit L,C :

Un condensateur totalement chargé à l'aide d'un générateur idéal de fem E se décharge dans une bobine et un conducteur ohmique. L'instant t=0 correspond au début de la décharge ; le condensateur se décharge alors directement dans une bobine sans résistance interne nulle (pas de conducteur ohmique).



Circuit de charge   Décharge du condensateur

1. Etablir en fonction de la charge q du condensateur et des paramètres du circuit, les expressions des tensions u_L et u_C.

   Aux bornes du condensateur : $q = C \cdot u_C$ d'où $u_C = \frac{q}{C}$

   Aux bornes de la bobine : $u_L = L\frac{di}{dt}$

   or, par définition de l'intensité di courant $i = \frac{dq}{dt}$ (où q est la plaque positive du condensateur)

   d'où $u_L = \frac{dq}{dt} + L \cdot \frac{d^2q}{dt^2}$

2. En déduire l'équation différentielle régissant l'évolution de la charge q du condensateur en fonction du temps. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme : $\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 \,.\, q = 0$. Définir ω_0 et A.

   D'après la loi d'additivité : $u_C + u_L = 0$

   soit $\frac{q}{C} + L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} = 0$

   en organisant : $\frac{q}{C} + L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} = 0$

   soit $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot q = 0$

   On a donc $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ soit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

3. On appelle ω_0 pulsation. Montrer que la pulsation est homogène à un l'inverse d'un temps.

   $$[\omega_0] = \left[\frac{1}{\sqrt{LC}}\right] = [LC]^{-\frac{1}{2}}$$

   or $[L] = \frac{U}{\left[\frac{di}{dt}\right]} = \frac{V}{\frac{A}{s}} = \frac{V}{C.s^{-2}} = \frac{V \cdot s^2}{C}$ et $[C] = \left[\frac{q}{u}\right] = \frac{C}{V}$

   D'où $[\omega_0] = [LC]^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{V \cdot s^2}{C} \cdot \frac{C}{V}\right)^{-\frac{1}{2}} = s^{-1}$

4. La solution de l'équation différentielle ainsi obtenue est de la forme : $q(t) = A\,cos(\,\alpha t)$

a. En utilisant les conditions initiales (condensateur chargé à t=0), déterminer A et B

   Conditions initiales : à t=0, $q(0) = Q$

   Mathématiquement : $q(0) = A$

   On en déduit donc que $A = Q$

   D'où la solution de l'équation différentielle : $q(t) = Q\,.\cos\,(\alpha\,.\,t)$

b. Définir α en remplaçant q par son expression dans l'équation.

Remplaçons $q(t)$ dans l'équation différentielle :

$\frac{dq}{dt} = -\alpha \cdot Q\,.\sin(\alpha\,.t)$ et $\frac{d^2q}{dt^2} = -\alpha^2 \cdot Q\,.\cos(\alpha\,.t)$

On arrive à : $-\alpha^2\,.Q\,.\cos(\alpha\,.t) + \frac{1}{LC}\,.Q\,.\cos(\alpha\,.t) = 0$

ce qui peut s'écrire : $(-\alpha^2 + \omega_0^2) \cdot Q\,.\cos(\alpha\,.t) = 0$

Ceci est vrai quelque soit t, si : $(-\alpha^2 + \omega_0^2) = 0$ soit $\alpha = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

D'où l'expression de la solution de l'équation différentielle : $q(t) = Q\,.\cos(\omega_0\,.t)$

5. Pourquoi parle-t-on « d'oscillations électriques » ? Donner l'expression de la période et de la fréquence de ces oscillations.

   Le circuit est le siège d'un courant électrique alternatif ; des charges électriques « oscillent » d'une plaque à l'autre du condensateur.

6. La période T d'un phénomène périodique est la durée au bout de laquelle le phénomène se reproduit identique à lui-même.

   Dans notre cas, la charge du condensateur est bien est phénomène périodique comme nous l'indique la solution établie.

   En utilisant la définition de la période qui se traduit ici par $q(t) = q(t+T)$ établir l'expression de la période T du phénomène étudié.

   On a vu que $q(t) = Q\,.\cos(\omega_0\,.t)$

   D'où $q(t+T) = Q.\cos\big(\omega_0\,.(t+T)\big) = Q\,.\cos(\omega_0\,.t + \omega_0\,.\,T)$

   Comme $q(t) = q(t+T)$ alors $cos(\,\omega_0 \cdot t) = cos(\omega_0 \cdot t + \omega_0 \cdot T)$

   Ceci est vrai si $\omega_0 \cdot T = 2\pi$

   soit $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

   Avec l'expression de ω_0 établie précédemment, on arrive à $T = 2\pi\sqrt{LC}$

7. L'expression de la période est-elle en accord avec l'étude dimensionnelle menée précédemment ?

   En effet : $[T] = \left[\frac{1}{\omega_0}\right] = [\omega_0]^{-1} = s$

   La période est bien homogène à un temps.

8. Déduire l'expression de la fréquence du phénomène.

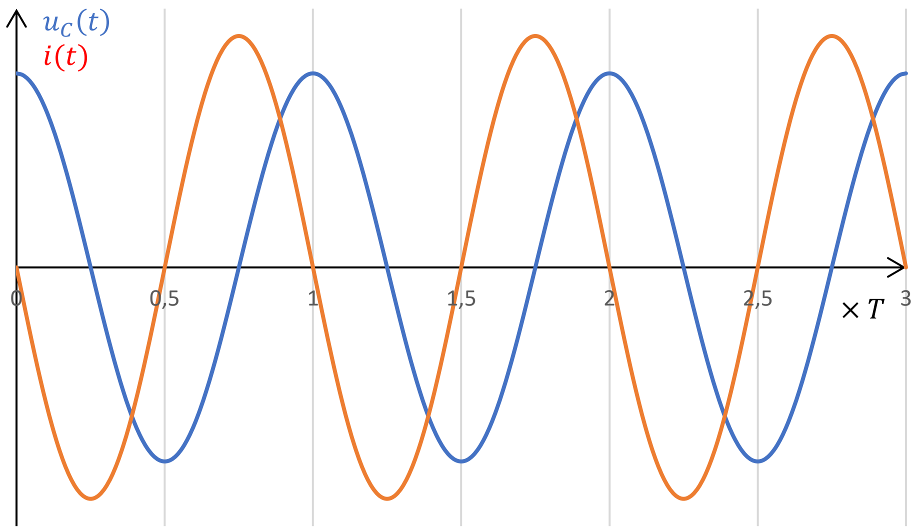
   Par définition de la fréquence : $F = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

9. Donner l'expression de l'intensité $i(t)$ traversant le circuit électrique et de $u_C(t)$

   $i = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 \cdot Q\,.\sin(\omega_0\,.t)$ et $u_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{Q}{C}\,.\cos(\omega_0\,.t)$

10. Tracer l'évolution de $i(t)$ et $u_C(t)$ sur un même graphique.

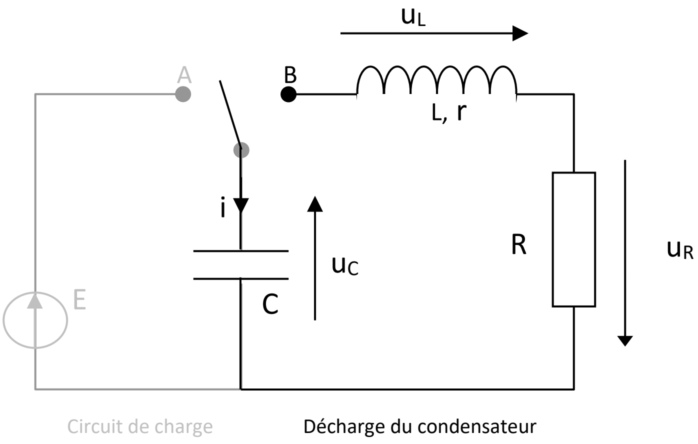
    En déduire le décalage temporel entre les deux courbes.



Décalage temporel : le courant $i(t)$ est en avance d'1/4 de période par rapport à la tension $u_C(t)$.

II. Equation différentielle d'un circuit R,L,C :

Un condensateur totalement chargé à l'aide d'un générateur idéal de fem E se décharge dans une bobine et un conducteur ohmique. L'instant t=0 correspond au début de la décharge ; le condensateur se décharge alors directement dans une bobine possédant une résistance interne r en série avec un condensateur de résistance R.



1. Etablir en fonction de la charge q du condensateur et des paramètres du circuit, les expressions des tensions u_L et u_C.

Aux bornes du condensateur : $q = C \cdot u_C$ d'où $u_C = \frac{q}{C}$

Aux bornes de la bobine : $u_L = r \cdot i + L\frac{di}{dt}$

or, par définition de l'intensité di courant $i = \frac{dq}{dt}$ (où q est la plaque positive du condensateur)

d'où $u_L = r \cdot \frac{dq}{dt} + L \cdot \frac{d^2q}{dt^2}$

Aux bornes du conducteur ohmique : $u_R = R \cdot i$ soit $u_R = R \cdot \frac{dq}{dt}$

2. En déduire l'équation différentielle régissant l'évolution de la charge q du condensateur en fonction du temps. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme : $\frac{d^2q}{dt^2} + A \cdot \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$. Définir ω_0 et A.

D'après la loi d'additivité : $u_C + u_L + u_R = 0$

soit $\frac{q}{C} + r \cdot \frac{dq}{dt} + L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} = 0$

en organisant : $\frac{q}{C} + (R+r)\cdot\frac{dq}{dt} + L\cdot\frac{d^2q}{dt^2} = 0$

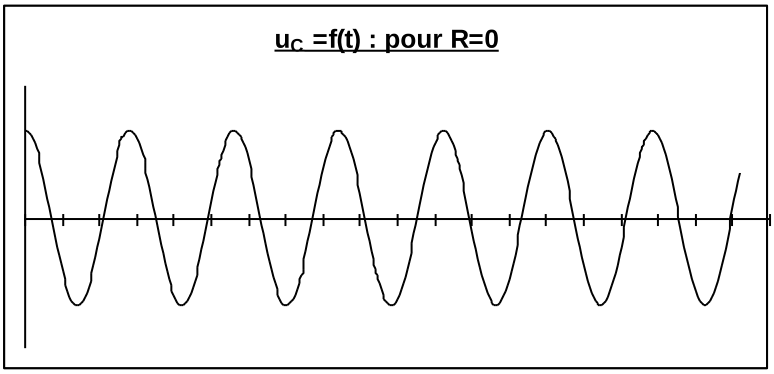
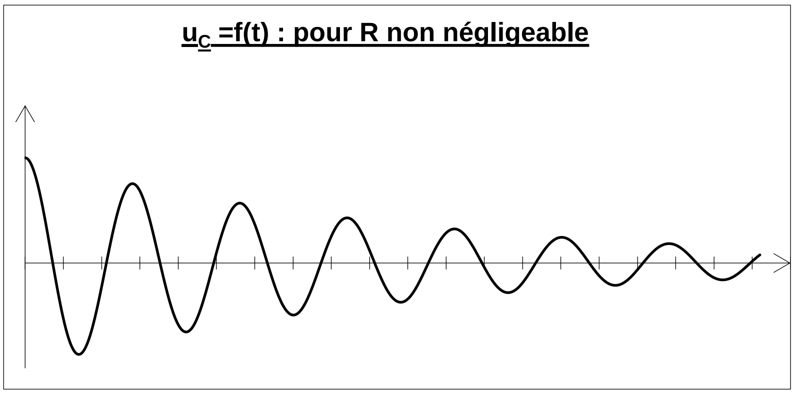
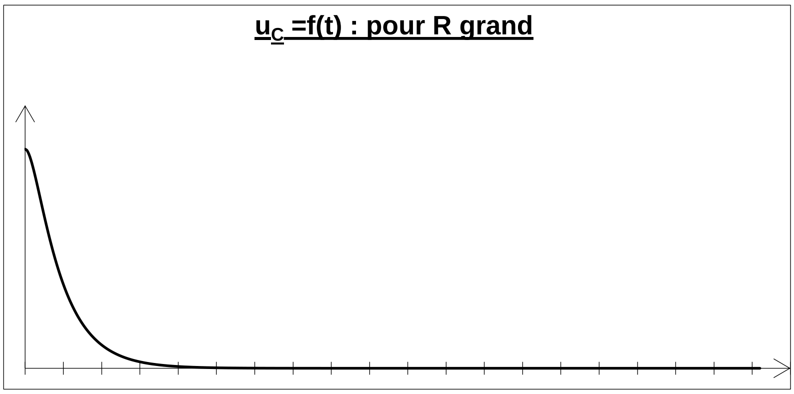
soit $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R+r}{L}\cdot\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}\cdot q = 0$

On a donc $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ soit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Et $A = \frac{L}{R+r}$

A est appelé terme d'amortissement ; il est responsable de l'amortissement des oscillations.

III. Différents types de régimes dans un cicruit RLC :

 u_C =f(t) : pour R=0	Régime périodique : Oscillations électriques libres non amorties
 u_C =f(t) : pour R non négligeable	Régime pseudo périodique : Oscillations électriques libres amorties
 u_C =f(t) : pour R grand	Régime apériodique : Pas d'oscillations ; le circuit se comporte comme un circuit RC.