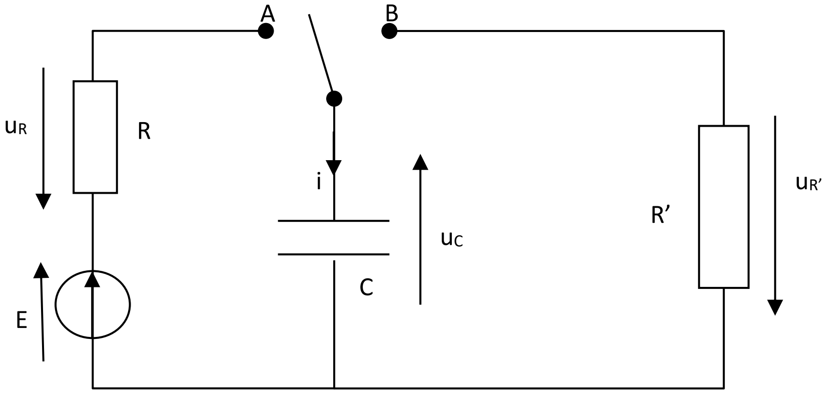
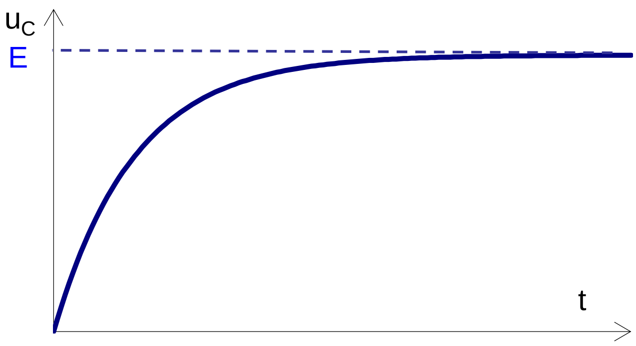
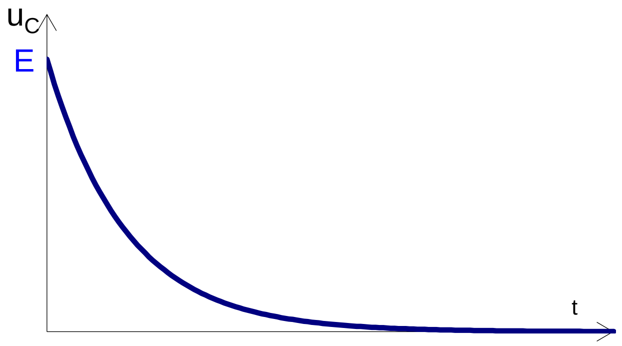
Condensateur : étude théorique de la charge et de la décharge

Circuits de charge et de décharge d'un condensateur à travers des conducteurs ohmiques :



Circuit de charge Circuit de décharge

Evolution de la tension u_C au cours de la charge	Evolution de la tension u_C au cours de la décharge
	

But du cours : établir en utilisant les lois de l'électricité les fonctions qui correspondent aux courbes d'évolution de la tension u_C ci-dessus, obtenues expérimentalement.

I. Etude de la charge :

A l'instant t=0, on bascule l'interrupteur en position A. Le condensateur initialement déchargé se charge.

1. Donner la valeur $u_C(0)$. $u_C(0) = 0$
   Quelle sera la valeur de $u_C(t_\infty)$? $u_C(\infty) = E$

2. Donner les relations liant u_C et i, u_R et i.
   Aux bornes du condensateur : $i = \frac{dq}{dt}$ or $q = C \cdot u_C$ d'où $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$
   Aux bornes du conducteur ohmique : $u_R = R \cdot i$
   Attention : vérifier les sens de mesures des tensions et courant.

3. Etablir une relation entre les tensions u_C, u_R et E.
   En déduire l'équation différentielle qui lie u_C à sa dérivée.

   Loi d'additivité des tensions dans le circuit de charge : $E - u_R - u_C = 0$ d'où $u_R + u_C = E$
   En remplaçant par l'expression des tensions établies précédemment : $RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = E$
   Ce qui s'écrit aussi : $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot u_C = \frac{E}{RC}$

On trouve souvent la notation suivante en physique : $\frac{du_C}{dt} = \dot{u}_C$

D'où l'écriture : $\dot{u}_C + \frac{1}{RC} \cdot u_C = \frac{E}{RC}$

4. Résoudre l'équation différentielle obtenue.

On commence par résoudre l'équation différentielle homogène : $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot u_C = 0$

qui peut encore s'écrire : $\frac{\frac{du_C}{dt}}{u_C} = -\frac{1}{RC}$

En intégrant des deux côtés : $\ln u_C = -\frac{1}{RC}.t + Cste$

Soit : $u_C = e^{-\frac{1}{RC}.t+Cste} = e^{Cste}.e^{-\frac{1}{RC}.t} = A.e^{-\frac{1}{RC}.t}$

Recherche d'une solution particulière : de l'équation $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot u_C = \frac{E}{RC}$: $u_C = E$

Solution générale de l'équation : $u_C = A.e^{-\frac{t}{RC}} + E$

Détermination de la constante A : à $t = 0$, $u_C = 0$ d'où $0 = A + E$ soit $A = -E$

D'où la solution : $u_C(t) = E.(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

5. On définit la constante de temps τ du dipôle RC comme le temps au bout duquel le condensateur est chargé à 63%.
Traduire mathématiquement cette définition.
$u_C(\tau) = \frac{63}{100} \times u_C(\infty) = \frac{63}{100} \times E$

Déterminer l'expression de τ.
Remplaçons τ dans la solution : $u_C(\tau) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{\tau}{RC}}\right)$
On a donc : $E \cdot \left(1 - e^{-\frac{\tau}{RC}}\right) = \frac{63}{100} \times E$ soit $1 - e^{-\frac{\tau}{RC}} = 0{,}63$ ou $e^{-\frac{\tau}{RC}} = 0{,}37$
Appliquons la fonction ln de chaque côté de l'égalité : $-\frac{\tau}{RC} = ln\,0{,}37 = -1$ d'où $\tau = RC$
D'où l'expression de la tension : $u_C(t) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau} \cdot t}\right)$

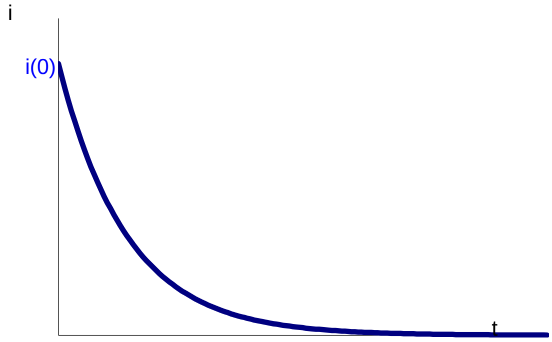
6. On considère le condensateur chargé lorsque u_C a atteint 99% de sa valeur maximale.
Donner l'expression de t_C, instant pour lequel $u_C(t_C) = 0{,}99 \cdot u_C(t_\infty)$
Par le même genre de calcul que dans la question précédente : $E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_C}{\tau}}\right) = 0{,}99 \cdot E$ d'où $e^{-\frac{t_C}{\tau}} = 0{,}01$
$t_C = \tau \cdot ln(0{,}01) = 4{,}6 \times \tau$

On considèrera que le condensateur est chargé lorsque $t = 5 \times \tau$

7. Donner l'expression de i(t) ; exprimer i(0) et $i(t_\infty)$; tracer l'évolution du courant au cours de la charge.

On a vu que $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$
d'où $i(t) = C \cdot \frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$

A t=0, $i(0) = \frac{E}{R}$



Remarque : on retrouve ce résultat en considérant la loi d'additivité : $u_R + u_C = E$
à t=0, $u_C(0) = 0$ d'où $u_R(0) = E$
or $u_R = R \cdot i$ avec la loi d'Ohm aux bornes du conducteur ohmique
et donc $i(0) = \frac{E}{R}$

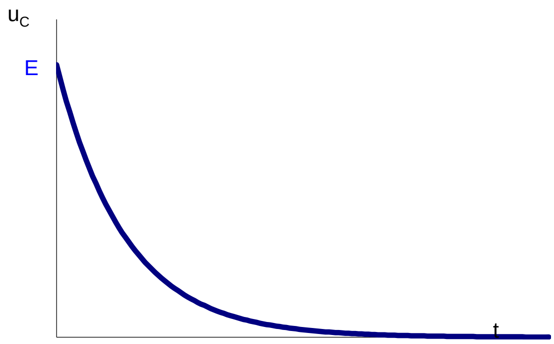
à t=∞, $i(\infty) = 0$ car $\lim_{t \to \infty} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = 0$

II. Etude de la décharge :

Le condensateur est maintenant chargé. On déclenche le chronomètre au moment où on bascule l'interrupteur en position B. Le condensateur se décharge.

1. Donner la valeur de $u_C(0)$. $u_C(0) = E$

   Quelle sera la valeur de $u_C(t_\infty)$? $u_C(\infty) = 0$
   Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction $u_C(t)$.



2. Etablir une relation entre les tensions u_C, $u_{R'}$.
   En déduire l'équation différentielle qui lie u_C à sa dérivée.
   Loi d'additivité des tensions dans le circuit de charge : $u_{R'} + u_C = 0$
   En remplaçant par l'expression des tensions établies précédemment : $R'C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$
   Ce qui s'écrit aussi : $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{R'C} \cdot u_C = 0$
   D'où l'écriture : $\dot{u}_C + \frac{1}{R'C} \cdot u_C = 0$

3. Résoudre l'équation différentielle obtenue.
   $$\frac{\frac{du_C}{dt}}{u_c} = -\frac{1}{R'C}$$
   En intégrant des deux côtés : $\ln u_C = -\frac{1}{R'C}.t + Cste$
   Soit : $u_c = e^{-\frac{1}{R'C}.t + Cste} = e^{Cste}.e^{-\frac{1}{R'C}.t} = A.e^{-\frac{1}{R'C}.t}$

   Détermination de A : à $t = 0$, $u_c = E$. Or $u_C(0) = A$ donc $A = E$

   D'où la solution : $u_C(t) = E.e^{-\frac{t}{R'C}}$

4. Donner l'expression de la constante de temps τ' de la décharge, sachant qu'elle correspond au temps qu'il faut pour que le condensateur ne soit chargé plus qu'à 37%.

$u_C(\tau') = \frac{37}{100} \times E$ d'où $e^{-\frac{\tau}{R'C}} = 0{,}37$

Appliquons la fonction ln de chaque côté de l'égalité : $-\frac{\tau'}{R'C} = ln\, 0,37 = -1$ d'où $\tau' = R'C$

D'où l'expression de la tension aux bornes du condensateur : $u_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau'}}$

5. Donner l'expression de i(t) ; exprimer i(0) et $i(t_\infty)$; tracer l'évolution du courant au cours de la charge.

$i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$ soit : $i(t) = -\frac{C \cdot E}{\tau'} \cdot e^{-\frac{t}{\tau'}}$ or $\tau' = R'C$ d'où $i(t) = -\frac{E}{R'} \cdot e^{-\frac{t}{\tau'}}$

On remarque que i est négatif au cours de la décharge (quelque soit t) ; cela signifie que lorsque le condensateur se décharge, le courant qui s'établir dans le circuit circule à travers le condensateur dans le sens opposé de celui qui circule lors de la charge.

$i(0) = -\frac{E}{R\prime}$ et $i(\infty) = 0$ car $\lim_{t \to \infty}\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = 0$