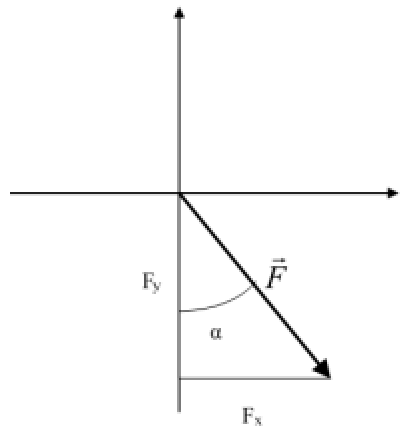
Equilibre à trois forces

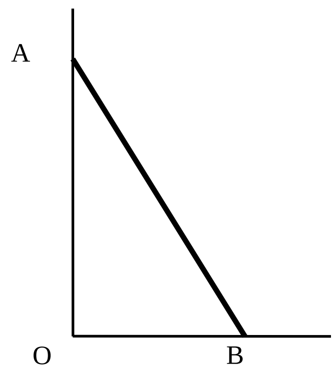
Conditions d'équilibre d'un système soumis à trois forces :
- ⇨ **Les trois forces sont concourantes**
- ⇨ **La somme vectorielle des forces doit être nulle**

Méthode :

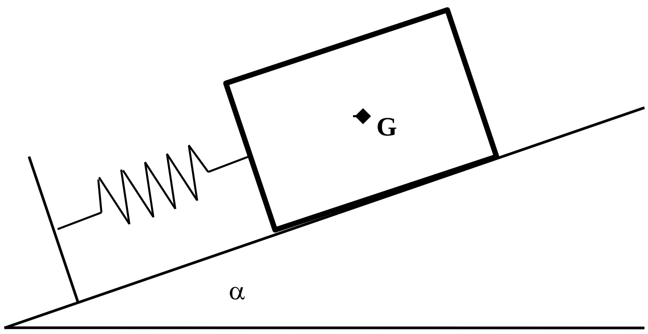
- Faire le bilan des forces sur le système préalablement défini en respectant la 1ère condition d'équilibre
- Choisir un repère :
  Origine : point de concours des droites d'action
  Axes : 2 axes perpendiculaires l'un à l'autre, par rapport auxquels on connaît les directions des forces (angles des forces définis par rapport à ces directions)
- Faire un second schéma représentant le repère et les forces qu'on a « glissées » à l'origine du repère le long de leur droite d'action
- Exprimer les coordonnées des forces dans le repère :
  Exemple : soit une force $\vec{F}$, dont on ne connaît pas l'intensité, mais on la nomme F ; on suppose que cette intensité correspond à la longueur du vecteur $\vec{F}$.
  Dans le triangle dessiné :
  Abscisse de $\vec{F}$: $F_x = F . sin\alpha$
  Ordonnée de $\vec{F}$: $F_y = -F . cos\alpha$
  Rq : coordonnée négative, orientée dans le sens opposé de l'axe des y.
- Appliquer 2ème condition d'équilibre sur chaque axe pour répondre au problème posé.



1. Une poutre homogène de masse m est posée contre un mur vertical ; le sol est rugueux et horizontal ; le mur est parfaitement lisse (pas de frottements). On donne : OA = 4,0m, OB = 3,0m, m = 80kg, g = 10m.s^{-2}
   a. Situer le centre de gravité de la poutre. Dessiner le poids $\vec{P}$ de la poutre, sans tenir compte de l'intensité de cette force.
   b. Que peut-on dire de direction de la réaction $\overrightarrow{R_A}$ du mur en A ? Justifier. Dessiner cette réaction, sans tenir compte de l'intensité de cette force.
   c. Comment déterminer la direction de la réaction $\overrightarrow{R_B}$ du sol en B ? Justifier. Dessiner cette réaction, sans tenir compte de l'intensité de cette force.
   d. Faire apparaître sur un schéma à l'échelle les directions des différentes forces qui s'appliquent à la poutre.
   Déterminer graphiquement l'angle α entre la verticale et la réaction du sol en B.
   e. Choisir un repère et refaire un schéma qui permettra d'exprimer les coordonnées des forces en fonction de m, g, α, R_A et R_B.
   f. En utilisant la deuxième condition d'équilibre projetée sur les axes, donner l'expression de R_A et R_B en fonction de m, g et α.

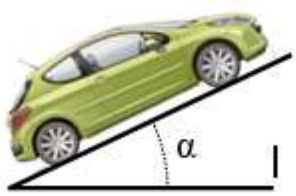


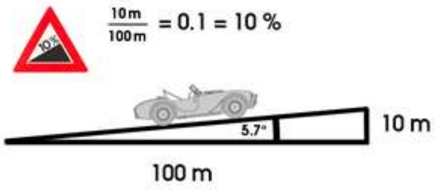
2. Un solide S de masse *m* est en équilibre sur un plan incliné d'angle α, reposant sur un ressort de coefficient de raideur *k*. Le contact entre le solide et le plan est sans frottement. La longueur du ressort à vide est l_0. Déterminer la longueur du ressort dans la position représentée sur le schéma.
   On donne pour les A.N. : *l_0=30cm, k=500N/m, m=5,0kg, g=10N/kg, α=60°*



3. Une voiture de masse m=1350kg est garée dans une route inclinée d'un angle α avec l'horizontale. On définit le coefficient de frottement φ comme étant le quotient de la réaction tangentielle (frottement f) sur la réaction normale (R_N). Dans le cas du contact pneu-route, ce coefficient ne peut dépasser 0,60.
Calculer l'angle α maximal pour lequel la voiture est à l'équilibre. En déduire le pourcentage d'inclinaison de la pente correspondante.

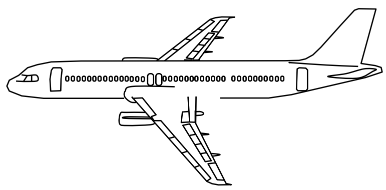
Rq : Une pente de 10 % signifie qu'à un déplacement horizontal de 100 m, correspond un déplacement vertical de 10 m.





4. Avion

Un avion Airbus A320 est mis en circuit d'attente à l'approche de l'aéroport d'arrivée. Il décrit une trajectoire à l'altitude constante de 3000 pieds au cours de laquelle il aborde plusieurs virages. Pour le confort des passagers, au cours de ces virages, l'avion a un mouvement circulaire uniforme. Sa vitesse est alors de 360 km.h^{-1}.
Pour effectuer ce mouvement, l'avion doit s'incliner d'un angle α=15° par rapport à l'horizontale.



Quel est le rayon r de sa trajectoire ?

Données :

Masse de l'avion :	m = 65 000 kg
Poussée maximale au décollage :	F= 240 kN

Au cours de son mouvement, l'avion est soumis à 4 forces représentées sur les schémas 1 et 2 :

$\vec{P}$: poids de l'avion
$\vec{R}$: portance (réaction de l'air) ; perpendiculaire au plan des ailes
$\vec{F}$: poussée ; force de propulsion générée par les réacteurs
$\vec{T}$: traînée ; frottements de l'air

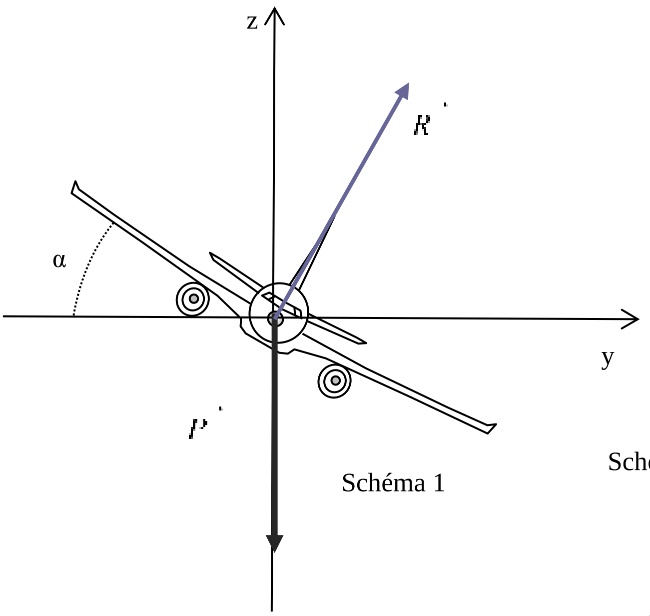


Schéma 1

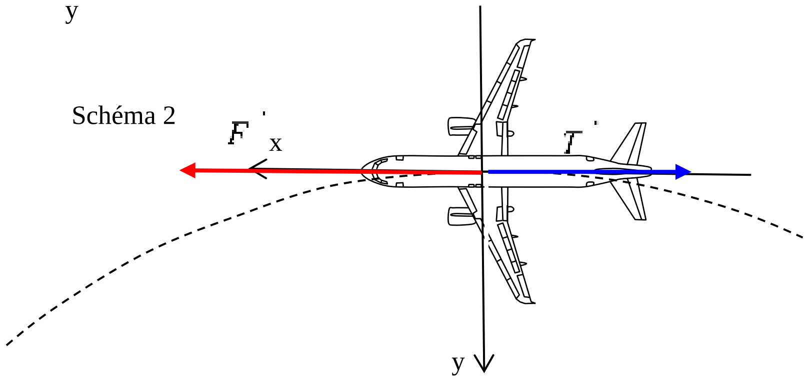
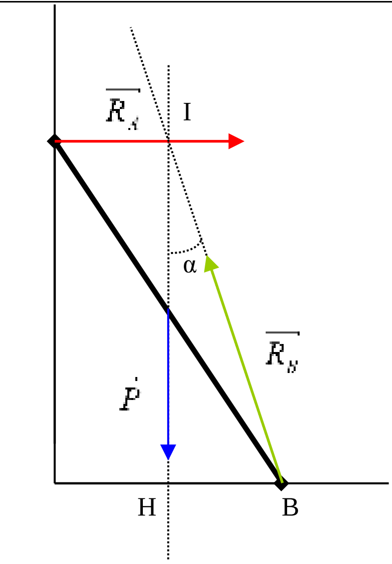


Schéma 2

I. Echelle :

Bilan des forces :

- $\vec{P}$: poids de la poutre, appliquée au centre de gravité, verticale, vers le bas
  P =mg
- $\vec{P}$: Réaction du mur, perpendiculaire au mur car pas de frottement
  R_A = ?
- $\overrightarrow{R_B}$: Réaction du sol, concourante aux autres forces (composante normale : s'oppose à l'enfoncement ; composante tangentielle : s'oppose au glissement)
  R_B = ?



Détermination de α par le calcul :

Dans le triangle HBI : $tan\,\alpha = \frac{HB}{HI} = \frac{OB}{2\cdot HI} A..N. \quad tan\,\alpha = \frac{3}{2\times 4} = 0{,}375 d \quad 'où \alpha \quad = 20{,}55°$

Détermination graphique de α : mesurer α avec un rapporteur, sur le schéma reproduit ci-contre à l'échelle suivante :

1cm sur le schéma pour l m en réalité.

Repère et coordonnées des forces :

$$\vec{P}\begin{vmatrix}0\\P\end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{R_A}\begin{vmatrix}R_A\\0\end{vmatrix} \quad \overrightarrow{R_B}\begin{vmatrix}-R_B\sin\alpha\\-R_B\cos\alpha\end{vmatrix}$$

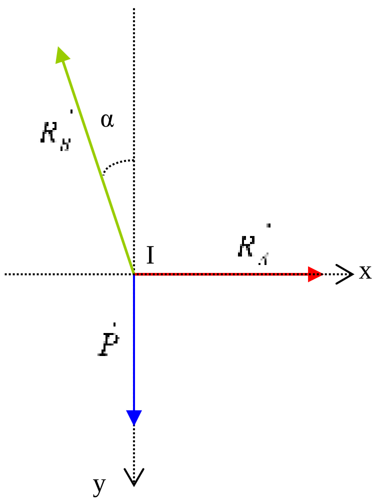
Condition d'équilibre :

$$\vec{P} + \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{R_B} = \vec{0}$$

$$\begin{cases}R_A - R_B\sin\alpha = 0\\ P - R_B\cos\alpha = 0\end{cases}$$

d'où $R_B = \frac{mg}{\cos\alpha}$ et $R_A = mg\,tan\,\alpha$

Application numérique : R_B = 854,4 N R_A = 300 N



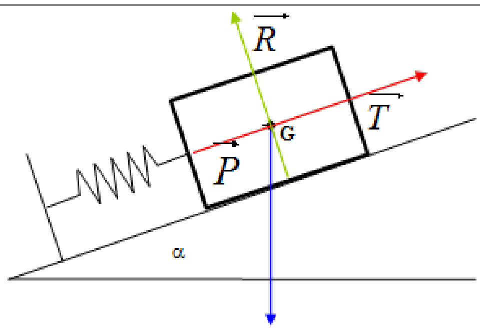
II. Ressort :

- Choix du système d'étude : système={Solide S }
- Bilan des forces s'appliquant solide :

  $\vec{P}$: poids du solide

  $\vec{T}$: tension du ressort qui repousse le solide

  $\vec{R}$: réaction du sol dont la direction est perpendiculaire (contact sans frottement)

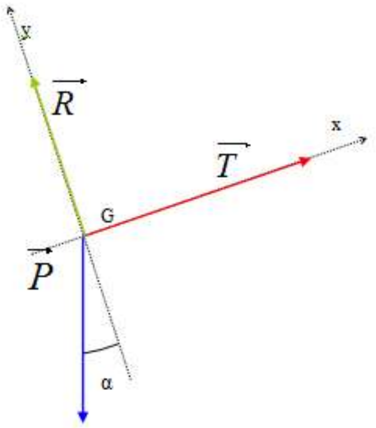


- Choix d'un repère et expression des coordonnées des forces dans ce repère :

Repère : (G ; Gx ; Gy)

Coordonnées des forces :

$\vec{P}\begin{vmatrix}-P\sin\alpha\\-P\cos\alpha\end{vmatrix}$ $\qquad \vec{R}\begin{vmatrix}R\\0\end{vmatrix}$ $\qquad \vec{T}\begin{vmatrix}T\\0\end{vmatrix}$



- 2ème condition d'équilibre :

$$\vec{P}+\vec{R}+\vec{T}=\vec{0}$$

qu'on projette sur les deux axes du repère :

$$\begin{cases}-P\sin\alpha+T=0\, sur Gx\\-P\cos\alpha+R=0\, sur Gy\end{cases}$$

$$T=P\sin\alpha=mg\cdot\sin\alpha$$

Calcul de la longueur du ressort :

$$T=k\cdot|l-l_0|$$

Or, ici il s'agit d'une compression de ressort. On a donc : $|l-l_0|=l_0-l$

D'où :

$$T=k\cdot(l_0-l)$$

Soit $l=l_0-\frac{T}{k}=l_0-\frac{mg}{k}\cdot\sin\alpha$

A.N. $\quad l=21cm$

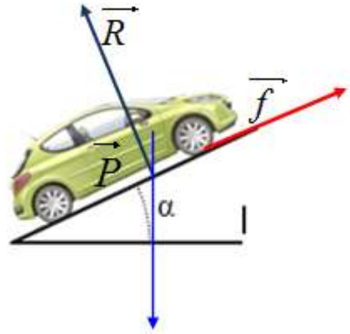
III. <u>Voiture :</u>

- Choix du système d'étude : système={voiture }
- Bilan des forces s'appliquant solide :

$\vec{P}$: poids de la route

$\vec{f}$: frottement de la route

$\vec{R}$: réaction normale du sol dont la direction est perpendiculaire

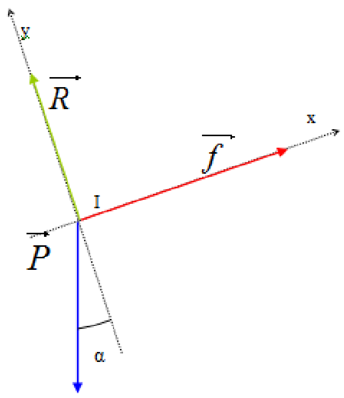


- Choix d'un repère et expression des coordonnées des forces dans ce repère :

Repère : (I ; Ix ; Iy)

Coordonnées des forces :

$\vec{P}\begin{vmatrix}-P\sin\alpha\\-P\cos\alpha\end{vmatrix}$ $\qquad \vec{R}\begin{vmatrix}R\\0\end{vmatrix}$ $\qquad \vec{f}\begin{vmatrix}f\\0\end{vmatrix}$



2ème condition d'équilibre :

$$\vec{P}+\vec{R}+\vec{f}=\vec{0}$$

qu'on projette sur les deux axes du repère :

$$\begin{cases}-P\sin\alpha+f=0\quad sur Ix\\-P\cos\alpha+R=0\quad s\qquad ur Iy\end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases}f=P\sin\alpha\\R=P\cos\alpha\end{cases}$$

D'après la définition du coefficient de frottement :

$$\phi=\frac{f}{R}=\frac{P\sin\alpha}{P\cos\alpha}=\tan\alpha$$

et donc $\alpha=\arctan\phi$

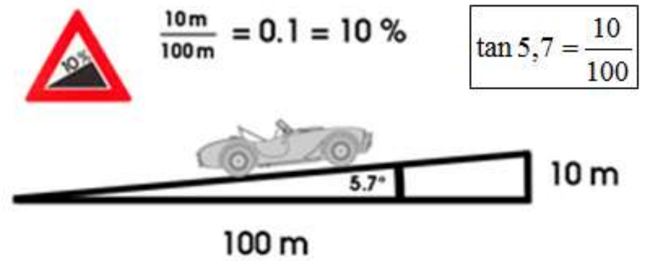
A.N. $\quad \alpha$ = 31°

Inclinaison de la pente :

Le pourcentage correspond à la tangente de l'angle :

tan 31 = 0,60

Il s'agit d'une pente à 60%



IV. Avion :

- Il y a ici un repère avec trois axes :
  (O, Ox, Oy Oz)
- Les axes Ox et Oy correspondent aux axes du repère de Frénet
  Comme le mouvement est uniforme, $\frac{dv}{dt} = 0$.
  Comme l'avion vole à une altitude constante, il n'y a pas d'accélération verticale
  On en déduit donc les coordonnées générales du vecteur accélération :
  $$\vec{a}\begin{pmatrix} a_x = \frac{dv}{dt} = 0 \\ a_y = \frac{v^2}{r} \\ a_z = 0 \end{pmatrix}$$
- Le bilan des forces est réalisé sur chacun des axes
- Coordonnées de chaque forces dans le repère considéré :
  $$\vec{F}\begin{pmatrix} F_x = F \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{T}\begin{pmatrix} T_x = -T \\ T_y = 0 \\ T_z = 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{P}\begin{pmatrix} P_x = 0 \\ P_y = 0 \\ p_z = -mg \end{pmatrix} \qquad \vec{R}\begin{pmatrix} R_x = 0 \\ R_y = R \,.\sin\alpha \\ R_z = R \,.\cos\alpha \end{pmatrix}$$

- On applique la deuxième loi de Newton : $\vec{F} + \vec{T} + \vec{P} + \vec{R} = m \,.\vec{a}$
  sur chaque axe :
  - Sur l'axe Ox : $F - T = 0$ d'où $T = F = 240\ kN$
  - Sur l'axe Oy : $R \,.sin\alpha = m \,.\frac{v^2}{r}$
  - Sur l'axe Oz : $-m.g + R.\cos\alpha = 0$

- Détermination de α :
  On a un système de deux équations (sur Oy et Oz) à deux inconnues
  sur Oy : $R.sin\alpha = m.\frac{v^2}{r}$
  Sur Oz : $R.cos\alpha = m \,.g$
  En divisant les membres de chaque côté : $\tan\alpha = \frac{v^2}{r.g}$ d'où $r = \frac{v^2}{g.tan\alpha}$

  A.N. $r = \frac{\left(\frac{360}{3,6}\right)^2}{9,8 \times sin15} = 3,94 \times 10^3 m = 3,94\ km$