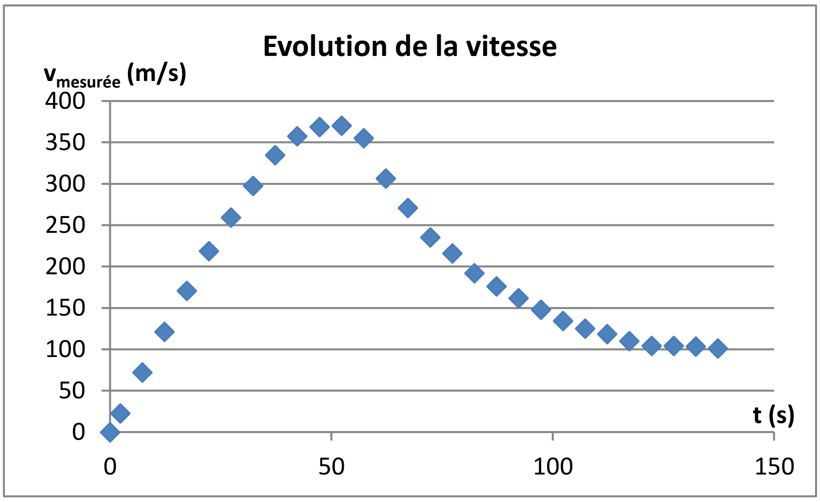
Le saut de Félix Baumgartner

A partir de la vidéo, on relève les valeurs de la vitesse toutes les 5 secondes de chute. J'obtiens les mesures suivantes :
(rq : le début de la vidéo (t=0s) ne correspondant pas au début de la chute, j'ai calculé que la vitesse de 22,78 m/s était à peu près atteinte au bout de 2,3s de chute libre (t=v/g soit t=22,78/9.7=2,3s)

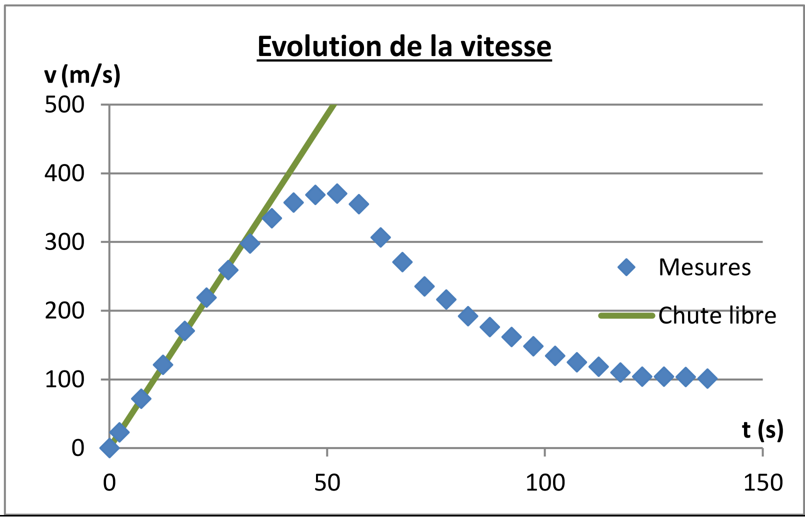
http://www.youtube.com/watch?v=raiFrxbHxV0

t	v (km/h)	v (m/s)
0	0	0
2.3	82	22.7777778
7.3	259	71.9444444
12.3	436	121.111111
17.3	615	170.833333
22.3	788	218.888889
27.3	933	259.166667
32.3	1072	297.777778
37.3	1205	334.722222
42.3	1287	357.5
47.3	1327	368.611111
52.3	1333	370.277778
57.3	1279	355.277778
62.3	1104	306.666667
67.3	975	270.833333
72.3	847	235.277778
77.3	778	216.111111
82.3	691	191.944444
87.3	634	176.111111
92.3	583	161.944444
97.3	533	148.055556
102.3	484	134.444444
107.3	450	125
112.3	427	118.611111
117.3	396	110
122.3	375	104.166667
127.3	375	104.166667
132.3	373	103.611111
137.3	364	101.111111

Le graphique v(t) correspondant à l'évolution de cette vitesse est le suivant :



On peut ajouter sur le graphique correspondant à l'équation horaire de la vitesse en chute libre : v = g.t :
On peut en déduire que la chute peut être considérée comme libre au cours des 25 premières secondes de chute, après quoi les frottements ne sont plus négligeables.



Modélisation de la force de frottement :

On peut assimiler la force de frottement dans un fluide (comme l'air) à la formule suivante (comme tu l'as fait) :

On a donc $f = \frac{1}{2} \cdot C \cdot S \cdot \rho \cdot v^2$

Si on pose $k = \frac{1}{2} \cdot C \cdot S$ et qu'on considère que k est constant pour Baumgartner, on peut exprimer la force de frottement comme suit : $f = k \cdot \rho \cdot v^2$

Où ρ est la masse volumique de l'air qui dépend de l'altitude.

Evolution de la pression atmosphérique en fonction de l'altitude :

On considère que la masse volumique suit globalement la loi empirique suivante dans les couches de l'atmosphère pour lesquelles z < 100km :

« La diminution théorique de la pression diminue de moitié tous les 5000 mètres ». (Wikipédia)

On peut à partir de cette loi empirique établir une relation entre ρ et z :

Soit ρ_0 la masse volumique de l'air à la surface de la Terre (altitude z=0) (on expliquera son calcul plus tard)

D'après la loi empirique citée plus haut, pour z = 5000, la masse volumique devient : $\rho_{5000} = \frac{\rho_0}{2}$

De la même façon, pour z = 2×5000 = 10000, $\rho_{10000} = \frac{\rho_{5000}}{2} = \frac{\rho_0}{4}$

Et puis, pour z = 3×5000 = 15000, $\rho_{15000} = \frac{\rho_{10000}}{2} = \frac{\rho_0}{2^3}$

On peut donc généraliser en écrivant : pour z = n×5000, $\rho_z = \frac{\rho_0}{2^n}$

Comme $n = \frac{z}{5000}$, l'expression de la masse volumique de l'air à l'altitude z devient : $\rho_z = \frac{\rho_0}{2^{\frac{z}{5000}}}$

Il nous faut maintenant calculer ρ_0, la masse volumique pour z=0 : on utilise la loi des gaz parfaits (effleurée en fin de seconde…) : elle relie la pression d'un gaz p à sa quantité de matière n, son volume V (en m^3) et sa température T (en K) :

$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$

Où R est une constante (constante des gaz parfaits : R = 8,32 lorsqu'on utilise les unités du système international)

On peut remplacer n par $n = \frac{m}{M}$ et la relation devient : $P \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$

En l'arrangeant un peu, on peut faire apparaître la masse volumique ρ :

$\rho = \frac{m}{V} = \frac{P}{RT} \cdot M$

Calculons donc la masse volumique de l'air à la surface de la Terre, lorsque :

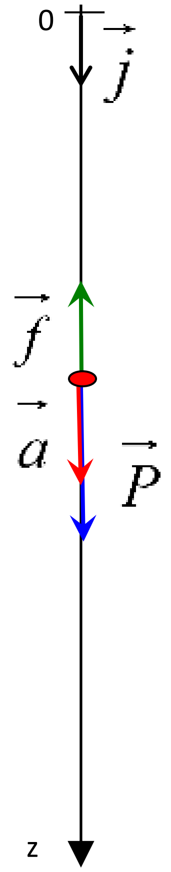
- la température est : T = 273K,
- la pression est : p = 101325 Pa
- la « masse molaire de l'air » est M =28,8 g.mol^{-1} (20%M(O_2) + 80%M(N_2) = 0,2×32 + 0,8×28 = 29g.mol^{-1})

On arrive à : $\rho_0 = \frac{101325}{8,32 \times 273} \times 28,8 \times 10^{-3} = 1,294 kg.m^{-3}$

Relation entre les forces qui agissent sur Baumgartner et son accélération : équation différentielle de la chute freinée

Faisons un schéma de la situation (la mécanique commence toujours par un schéma) :

Choix du repère :



On choisit un axe Oz vertical orienté vers le bas ; soit $\vec{j}$ le vecteur unitaire associé à cet axe.
A t=0, Baumgartner est à l'origine du repère (en O)

Bilan des forces :

Baumgartner (point rouge) subit deux forces dont on peut donner l'expression vectorielle en fonction de leur intensité et du vecteur unitaire $\vec{j}$

- Son poids : $\vec{P} = P \cdot \vec{j} = mg \cdot \vec{j}$
- les frottements $\vec{f} = -k \cdot \rho \cdot v^2 \cdot \vec{j}$

Accélération :

Soit $\vec{a}$ l'accélération subie par Bamgartner :
Il s'agit d'un vecteur orienté vers le bas. (Baumgartner accélère en descendant)
En fonction du vecteur unitaire, l'accélération s'exprime : $\vec{a} = a \cdot \vec{k}$

Les vecteurs $\vec{P}$, $\vec{f}$ et $\vec{a}$ sont liés par la 3ème loi de Newton $\boxed{\vec{P} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}}$
C'est une loi fondamentale en mécanique, posée comme principe par Newton, que vous découvrirez en terminale. Elle n'est cependant pas compliquée à comprendre : elle lie les forces qui agissent sur un objet et leur effet (accélération).

En utilisant les expressions des forces en fonction du vecteur unitaire, cette 3ème loi de Newton devient :

$$mg \cdot \vec{k} - k \cdot \rho \cdot v^2 \cdot \vec{k} = m \cdot a \cdot \vec{k}$$

Soit $$mg - k \cdot \rho \cdot v^2 = m \cdot a$$

d'où $$a = -\frac{k}{m} \cdot \rho \cdot v^2 + g$$

Calcul de la vitesse :

Au lieu de calculer la vitesse à partir d'une seule formule, on va appliquer une méthode (appelée méthode d'Euler) qui permet de calculer la vitesse à l'instant t+Δt connaissant la vitesse et l'accélération à l'instant t (qui précède t+Δt).

Il faut d'abord comprendre ce qu'est l'accélération : il s'agit de l'augmentation de la vitesse pendant une seconde de chute ; elle se mesure en $m.s^{-2}$
En admettant que la vitesse varie de $v(t)$ à $v(t+\Delta t)$ pendant une durée Δt, on peut calculer l'accélération pendant cet intervalle de temps de la façon suivante : $a \approx \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$
Ce qui traduit bien l'augmentation de la vitesse pendant 1s.
Si on connait a, v et Δt, on peut donc calculer $v(t+\Delta t)$ en transformant la relation : $v(t+\Delta t) \approx v(t) + a \cdot \Delta t$

On a donc maintenant 2 équations à disposition pour résoudre notre problème :

$a = -\frac{k}{m} \cdot v^2 + g$ (relation 1)

Et

$v(t+\Delta t) \approx v(t) + a \cdot \Delta t$ (relation 2)

Par ailleurs, on peut aussi écrire que la vitesse peut s'exprimer de façon suivante (comme on le fait lors de l'exploitation d'un enregistrement chronophotographique) :

$v(t) = \frac{z(t+\Delta t) - z(t-\Delta t)}{2\Delta t}$

D'où la relation : $z(t+\Delta t) = z(t-\Delta t) + v(t) \cdot 2\Delta t$ (relation 3)

Et enfin rappelons la relation qui permet de calculer ρ_z : $\rho_z = \frac{1{,}294}{2^{\frac{z}{5000}}}$ (relation 4)

Construisons un tableau qui permet de calculer la vitesse pas à pas, pour chaque instant :

- à t = 0
  - on sait que la vitesse de départ est nulle ce qui se traduit par v(0)=0
  - L'accélération est a = g = 9,8 (je suppose ici que les variations (9,7) de g n'ont pas beaucoup d'incidence sur les résultats)
  - z = 39000
  - On peut calculer ρ_{39000} en utilisant la relation 4 : $\rho_{39000} = \frac{1{,}294}{2^{\frac{39000}{5000}}}$
  - En utilisant la relation 1, on peut calculer $a(0) = -\frac{k}{m} \cdot \rho_{39000} \cdot v(0)^2 + 9{,}8$
- à t = 2,3s
  - la chute étant libre dans les 20 premières secondes, on peut poser v(2,3) = g.t = 9.8×2,3=22,5 $m.s^{-1}$
  - la chute étant libre, on peut calculer $z = 39000 - \frac{1}{2}gt^2$ soit $z = 39000 - \frac{1}{2} \times 9{,}8 \times 2{,}3^2 = 38974$
  - En se servant de la relation 4, on peut calculer $\rho_{38974} = \frac{1{,}294}{2^{\frac{38974}{5000}}}$
  - En se servant de la relation 1, on peut calculer l'accélération :

    $a(2{,}3) = -\frac{k}{m} \cdot \rho_{38974} \cdot v(2{,}3)^2 + 9{,}8$

    on prendra une valeur arbitraire de k/m pour commencer qu'on ajustera par la suite.
    Soit k/m = 0,004
  -
- à t = 7,3s
  - En se servant de la relation 2, on peut calculer la vitesse :

    $v(7{,}3) = v(2{,}3) + a(2{,}3) \times 5 = 22{,}5 + 9{,}8 \times 5 = 71{,}5$
  - la chute étant toujours libre, on peut calculer $z = 39000 - \frac{1}{2}gt^2$ soit

    $z = 39000 - \frac{1}{2} \times 9{,}8 \times 7{,}3^2 = 38738$
  - En se servant de la relation 4, on calcule à nouveau $\rho_{38738} = \frac{1{,}294}{2^{\frac{38738}{5000}}}$
  - En se servant de la relation 1, on peut calculer l'accélération :

    $a(7{,}3) = -\frac{k}{m} \cdot \rho_{38738} \cdot v(7{,}3)^2 + 9{,}8$

- à t = 12,3s

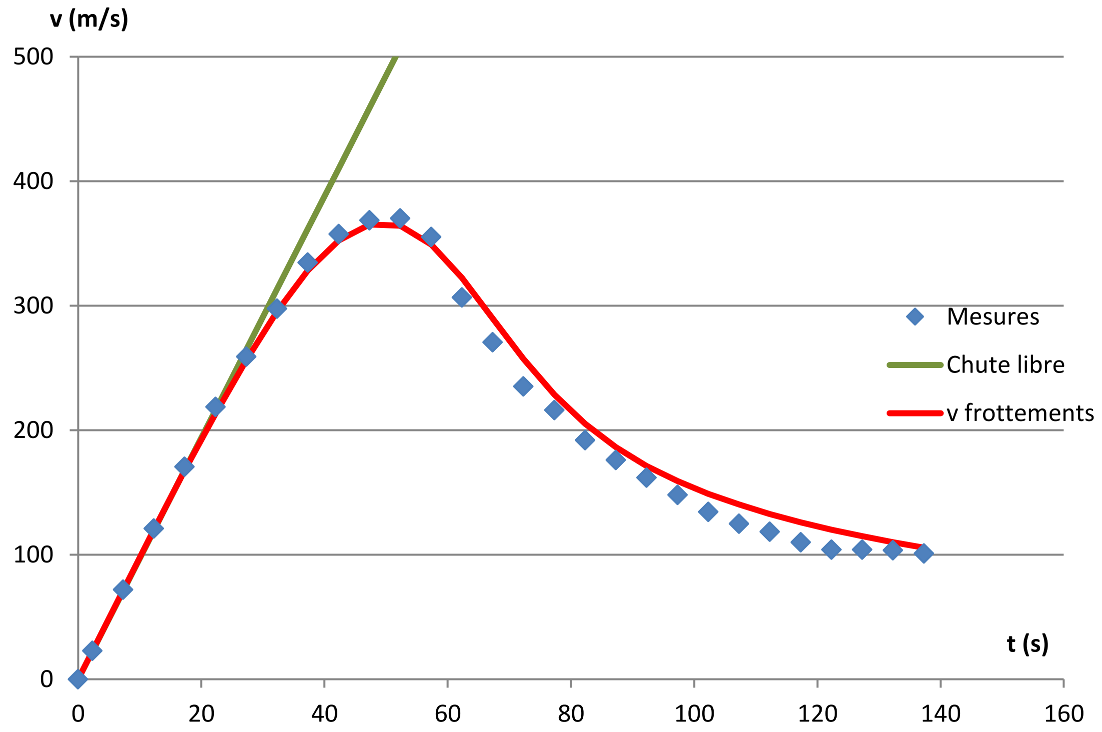
- En se servant de la relation 2, on peut calculer la vitesse :
  $v(12{,}3) = v(7{,}3) + a(7{,}3) \times 5$
- **On ne considère plus la chute comme libre à partir de maintenant ; on calcule l'altitude à partir de la relation 3 :**
  $z(12{,}3) = z(2{,}3) - v(7{,}3) \times 10 = 38259$
- En se servant de la relation 4, on calcule à nouveau ρ_{38259}
- En se servant de la relation 1, on calcule l'accélération :
  $$a(12{,}3) = -\frac{k}{m} \cdot \rho_{38259} \cdot v(12{,}3)^2 + 9{,}8$$

- On recommence les opérations précédentes pour toutes les dates, d'où la nécessité du tableur (EXCEL)

(voir tableau récapitulatif des formules ci-dessous ; une fois la ligne correspondant à t=12,3s établie, il suffit de recopier les formules dans les colonnes avec EXCEL)

On trace alors la vitesse obtenu sur le même graphique que les mesures pour vérifier si notre modèle fonctionne.

<u>Evolution de la vitesse en fonction du temps</u>



On constate qu'en ajustant la valeur de k/m à 0,003 la modélisation correspondant bien aux valeurs mesurées, au moins jusqu'au passage par la vitesse maximale.
Après il y a un décalage mais il peut s'expliquer par le fait que ρ a été calculé pour une température de 0° alors que à 10000m, la température n'est plus que -54° comme tu l'as calculé. Tu peux encore essayer d'améliorer le modèle en ajoutant une colonne température et une colonne ρ_0 correspondant à la température…

<u>Commentaire personnel :</u>
Je suis très surpris que le modèle corresponde si bien : il est vrai qu'on peut discuter la valeur de k/m qui fait intervenir S et C qui sont supposés ici constants, ce dont je ne suis pas sûr. En tout cas on a réussi à modéliser la force de frottement et du coup on peut la calculer.
J'ai tracé deux autres graphiques :
v en fonction de z et f en fonction de z…. (j'ai choisi m=100kg pour la masse de Baumgartner avec son équipement ; à confirmer)

t (s)	v ($m.s^{-1}$)	z	ρ	a ($m.s^{-2}$)
0	0	39000	$\rho_{39000} = \dfrac{1{,}294}{2^{\frac{39000}{5000}}}$	$a(0) = -\dfrac{k}{m}\cdot\rho_{39000}\cdot v(0)^2 + 9{,}8$
2,3	v(2,3) = g.t = 9,8×2,3=22,5	$z = 39000 - \frac{1}{2}\times 9{,}8\times 2{,}3^2 = 38974$	$\rho_{38974} = \dfrac{1{,}294}{2^{\frac{38974}{5000}}}$	$a(2{,}3) = -\dfrac{k}{m}\cdot\rho_{38974}\cdot v(2{,}3)^2 + 9{,}8$
7,3	$v(7{,}3) = v(2{,}3) + a(2{,}3)\times 5 = 22{,}5 + 9{,}8\times 5 = 71{,}5$	$z = 39000 - \frac{1}{2}\times 9{,}8\times 7{,}3^2 = 38738$	$\rho_{38738} = \dfrac{1{,}294}{2^{\frac{38738}{5000}}}$	$a(7{,}3) = -\dfrac{k}{m}\cdot\rho_{38738}\cdot v(7{,}3)^2 + 9{,}8$
12,3	$v(12{,}3) = v(7{,}3) + a(7{,}3)\times 5$	$z(12{,}3) = z(2{,}3) - v(7{,}3)\times 10$ =38259	$\rho_{38259} = \dfrac{1{,}294}{2^{\frac{38259}{5000}}}$	$a(12{,}3) = -\dfrac{k}{m}\cdot\rho_{38259}\cdot v(12{,}3)^2 + 9{,}8$