Chute

On étudie le mouvement d'un corps (bille) de masse m ; la masse volumique du corps est appelée ρ et son volume V.
L'intensité de la pesanteur est notée g.

I. Chute libre :

1. Définition :

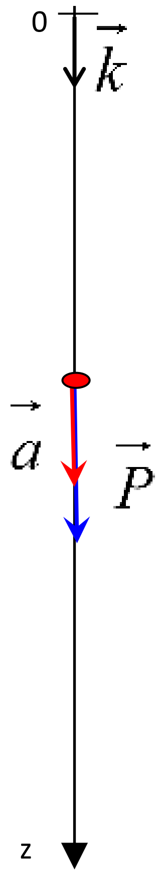
   Chute libre : chute sous la seule action du poids

2. Conditions initiales :

   On suppose que le corps commence à chuter à t=0 ; Que peut-on dire de la vitesse initiale ?
   v(0)=0

3. Choix du repère :

   On choisit un axe Oz vertical orienté vers le bas ; à t=0, le corps est à l'origine du repère (en O)



4. Bilan des forces :

   a. Faire le bilan des forces qui agit sur le corps au cours de son mouvement de chute.
   b. Exprimer les forces en fonction de leur intensité et du vecteur unitaire $\vec{k}$.

   $$\vec{P} = P \cdot \vec{k} = mg \cdot \vec{k}$$

   c. Dessiner le vecteur accélération ; donner son expression en fonction de $a = \frac{dv}{dt}$ et $\vec{k}$.

   $$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{k}$$

5. Etude dynamique :

   a. Appliquer la deuxième loi de Newton et montrer que la vitesse de la bille s'exprime de façon suivante :
   $v = g \cdot t + A$ où A est une constante à déterminer en utilisant les conditions initiales de la chute.

   Deuxième loi de Newton : $\vec{P} = m \cdot \vec{a}$

   soit $mg \cdot \vec{k} = m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \vec{k}$

   et donc $g = \frac{dv}{dt}$

   Ce qui donne $v = g \cdot t + A$ en intégrant (recherche de primitive) l'expression précédente.
   Détermination de A : à *t=0*, *v(0)=0*, ce qui implique que *A=0*.

L'expression de la vitesse du corps en chute libre est donnée par la relation : $v = g \cdot t$

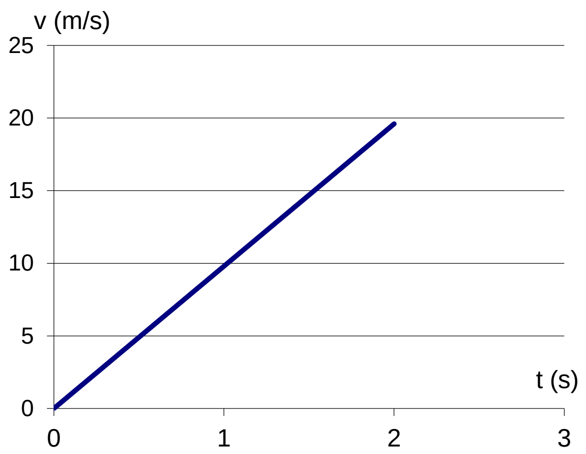
b. On rappelle que $v = \frac{dz}{dt}$. Montrer que l'équation horaire de la chute libre est du type : $z = \frac{1}{2}g \cdot t^2 + B$
où B est une constante à déterminer en utilisant les conditions initiales.

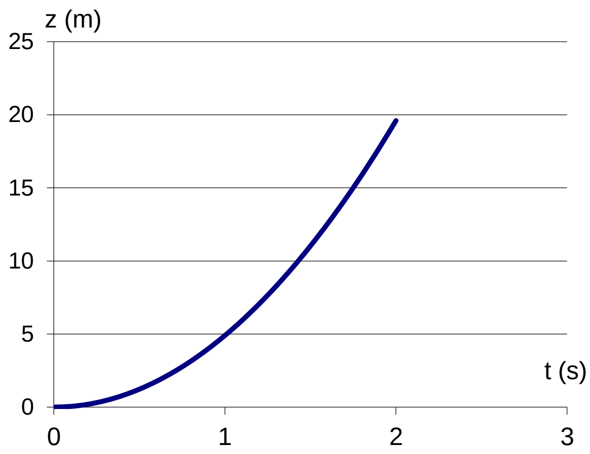
On a vu que $v = g \cdot t$ d'où $\frac{dz}{dt} = g \cdot t$
En intégrant cette expression, on arrive à $z = \frac{1}{2}g \cdot t^2 + B$
Détermination de B : à *t=0*, le corps est à *z=0* ; on a donc *z(0)=0*, ce qui implique que *B=0*.
L'expression de la distance parcourue par le corps en chute libre est : $z = \frac{1}{2}g \cdot t^2$

c. La vitesse et la distance parcourue au cours de la chute libre d'un objet dépendent-elles de sa masse ?
On remarque que la vitesse de la bille ne dépend pas de la masse du corps.

6. Graphes :

Tracer l'allure des graphes v=f(t) et z=f(t)

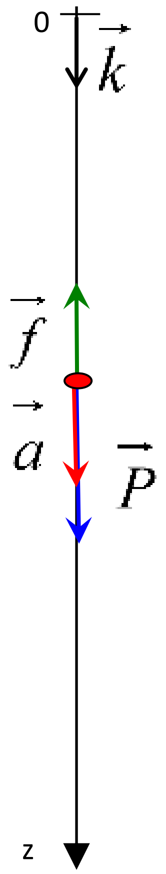




II. Chute avec frottement : cas où $\vec{f} = -k\,.\vec{v}$

1. Conditions initiales :

   On suppose que le corps commence à chuter à t=0 ; Que peut-on dire de la vitesse initiale ?
   v(0)=0



2. Choix du repère :

   On choisit un axe Oz vertical orienté vers le bas ; à t=0, le corps est à l'origine du repère (en O)

3. Bilan des forces :

   Faire le bilan des forces qui agit sur le corps au cours de son mouvement de chute.
   Exprimer les forces en fonction de leur intensité et du vecteur unitaire $\vec{k}$.

   $\vec{P} = P \cdot \vec{k} = mg \cdot \vec{k}$ et $\vec{f} = -k.v \cdot \vec{k}$

   Dessiner le vecteur accélération ; donner son expression en fonction de $a = \frac{dv}{dt}$ et $\vec{k}$.

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{k}$$

4. Montrer que l'équation différentielle précédente peut alors se mettre sous la forme : $\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} + B \cdot v = A$
   Donner l'expression littérale de A et de B.

   Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}$

   soit $mg \cdot \vec{k} - k.v \cdot \vec{k} = m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \vec{k}$

   et donc $mg - kv = m \cdot \frac{dv}{dt}$

   d'où $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}.v = g$

   On constate que A=g et $B = \frac{k}{m}$

5. Résolution de l'équation différentielle :
   Méthode :
   - On résout d'abord l'équation différentielle $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}.v = 0$.
   - On cherche une solution particulière à l'équation $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}.v = g$
   - La solution générale de cette équation sera la somme des deux solutions déterminées précédemment.
   - On utilise les conditions initiales pour déterminer les éventuelles constantes d'intégration

   a. Résolution de l'équation $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}.v = 0$, appelée équation différentielle homogène associée :

   On peut écrire l'équation sous la forme : $\frac{\frac{dv}{dt}}{v} = -\frac{k}{m}$

On a donc une équation mathématique du type $\frac{v'}{v} = -\frac{k}{m} = Cste$

On sait que $\frac{v'}{v}$ est la dérivée de la fonction $\ln v$

On peut donc chercher la primitive de chaque côté de l'équation :

$$\ln v = -\frac{k}{m}.t + C \text{ où C est une constante d'intégration}$$

Pour éliminer la fonction ln , on utilise la fonction exponentielle :

$$e^{\ln v} = e^{-\frac{k}{m}.t+C}$$

$$v = e^C.e^{-\frac{k}{m}.t} = K.e^{-\frac{k}{m}.t}$$

b. Recherche d'une solution particulière de $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}.v = g$

On cherche pour v_p une constante pour laquelle $\frac{dv_p}{dt} = 0$

On a alors $\frac{k}{m}.v_p = g$ d'où $v_p = \frac{mg}{k}$

c. Expression de la solution générale : $v((t) = K.e^{-\frac{k}{m}.t} + \frac{mg}{k}$

d. Détermination de la constante K :

On utilise les conditions finales : $v(0) = 0$

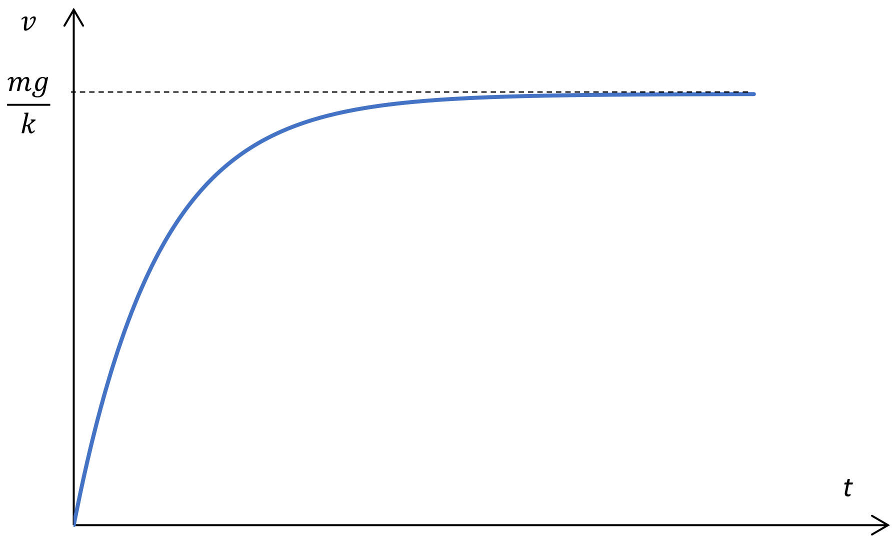
Or $v(\infty) = K.e^{-0} + \frac{mg}{k} = 0$ soit $K + \frac{mg}{k} = 0$ d'où $K = -\frac{mg}{k}$

Solution de l'équation différentielle : $v(t) = \frac{mg}{k}.\left(1 - e^{-\frac{k}{m}.t}\right)$

6. Tracer le graphe représentant l'évolution de la vitesse v en fonction du temps :

Mathématiquement, $\lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{mg}{k}.(1-0) = \frac{mg}{k} = Cste$

La vitesse tend vers une vitesse limite.



III. Deuxième cas : l'intensité de la force de frottement s'exprime de la façon suivante $f = k \cdot v^2$ (on parle de frottements visqueex)

Dans ce cas, l'équation différentielle se met sous la forme : $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} \cdot v^2 = g$

1. Vitesse limite :

   a. Expliquer qualitativement comment la prise en compte de la force de frottement permet d'expliquer que le corps atteint une vitesse limite au bout d'un certain de chute.

   La force de frottement s'oppose au mouvement ; elle empêche le corps d'accélérer autant que si il était en chute libre.
   Plus le corps chute, plus la vitesse augmente ; plus la vitesse augmente, plus la force de frottement augmente et donc plus la vitesse augmente moins elle accélère. On atteint bien une vitesse limite qui sera la vitesse maximale de la bille.

   b. Lorsque la vitesse de la bille atteint la vitesse limite $v_{\lim}$, que devient le terme $\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}$ de les équations différentielles précédentes ?
   En déduire les expressions littérales des vitesses limites possibles v_{Lim}

   Lorsque la vitesse limite est atteinte : $\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = \frac{dv_{lim}}{dt} = 0$ puisque par définition $v_{\mathrm{lim}} = Cste$

   l'équation différentielle devient : $\frac{k}{m} . v_{Lim}^2 = k$ d'où $v_{Lim} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$

2. Evolution de la vitesse : graphe v=f(t) :

On ne peut trouver une solution à l'équation différentielle de cette chute.
On cherche à tracer l'évolution de la vitesse v=f(t) en utilisant la méthode d'Euler, méthode qui permet de résoudre numériquement l'équation différentielle. Elle consiste à calculer par petits pas ($\Delta t = 0{,}1\ s$) la vitesse v de la bille et son accélération $a = \frac{dv}{dt}$ à partir de $t = 0$.
L'approximation d'Euler est la suivante : on considère que l'accélération est constante pendant le pas Δt. Il en résulte que $a \approx \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$

Donnée : $\frac{k}{m} = 0{,}8$

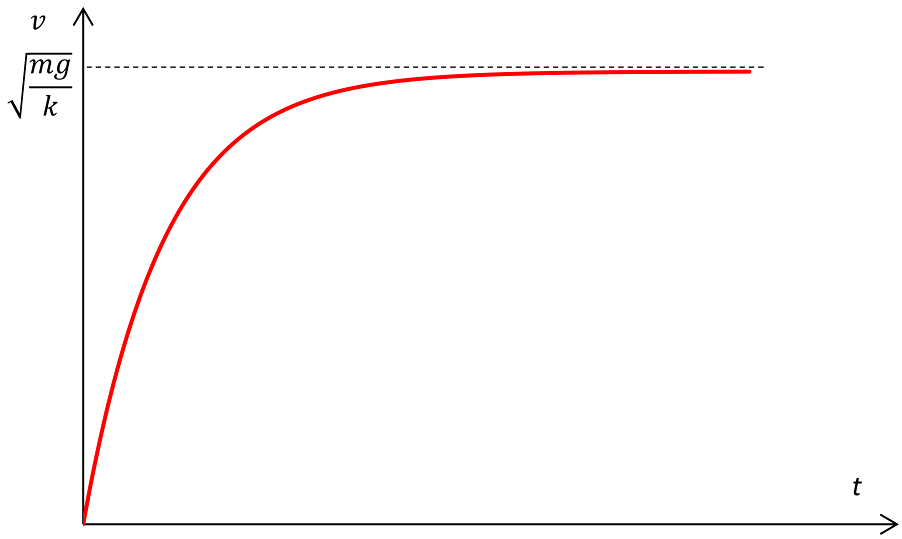
a. L'équation différentielle est : $\frac{dv}{dt} + 0{,}8 \,.\, v^2 = 9{,}8$ d'où
b. Expression de l'accélération : $a = \frac{dv}{dt} = -0{,}8 \,.\, v^2 + 9{,}8$
c. Expression de la vitesse $v(t+\Delta t)$ en utilisant l'approximation d'Euler en utilisant $v(t)$, a et Δt.
   L'approximation d'Euler annonce : $a \approx \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$
   D'où $v(t+\Delta t) = v(t) + a \cdot \Delta t$

d. Remplir le tableau suivant : (Détailler les 2 premières lignes de calcul)

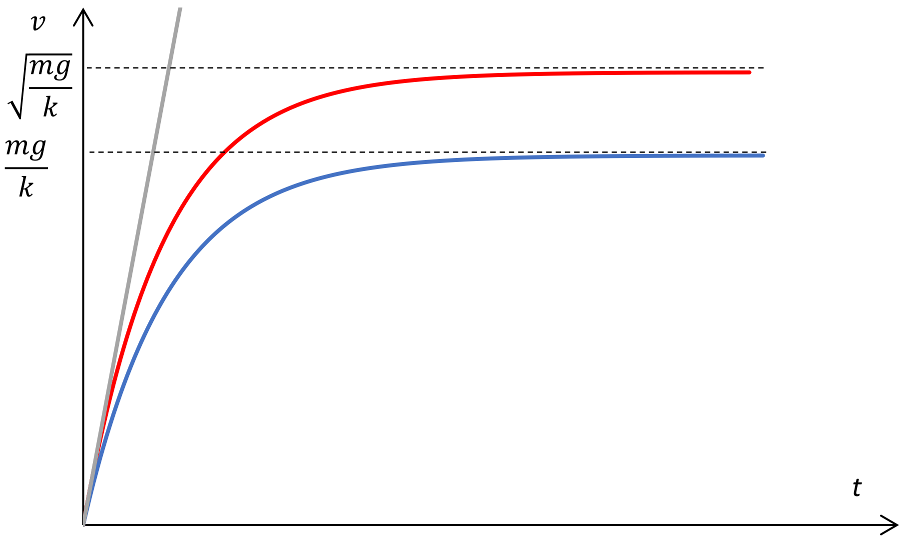
t (s)	v (m.s⁻¹)	$a = \frac{dv}{dt}$ (m.s⁻²)
0	0	$a(0) = -0{,}8 . v^2(0) + 9{,}8 = 9{,}8$
0,1	$v(0+0{,}1) = v(0) + a(0) \times 0{,}1 = 0{,}98$	$a(0{,}1) = -0{,}8 \,.\, v^2(0{,}1) + 9{,}8 = 9{,}03$

0,2	$v(0{,}2) = v(0{,}1) + a(0{,}1) \times 0{,}1$ $= 0{,}98 + 9{,}03 \times 0{,}1$ $= 1{,}88$	$a(0{,}2) = -0{,}8 \,.\, v(0{,}2) + 9{,}8 = 8{,}30$

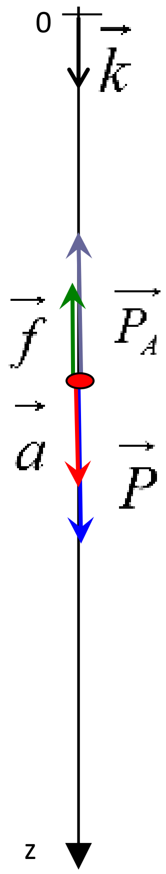
e. Reproduire ce tableau avec Excel, en calculant la vitesse pendant 10s.



On remarque que pendant les tous premiers instants du mouvement, le corps peut être considéré en chute « libre ».



- Chute dans un fluide dans lequel ρ_{fluide} n'est plus négligeable devant ρ_{corps}



1. Définition :

Quelle est la force qu'on ne peut plus négliger à présent ?
Rappeler la définition de cette force.
Exprimer l'intensité de cette force en fonction de ρ_{fluide}, V et g
On ne néglige plus la poussée d'Archimède.
La poussée d'Archimède s'oppose au poids du volume d'eau déplacé.
$P_A = \rho_{fluide} \cdot V \cdot g$

2. Conditions initiales :

On suppose que le corps commence à chuter à t=0 ; Que peut-on dire de la vitesse initiale ?
v(0)=0

3. Choix du repère :

On choisit un axe Oz vertical orienté vers le bas ; à t=0, le corps est à l'origine du repère (en O)

4. Bilan des forces :

Faire le bilan des forces qui agit sur le corps au cours de son mouvement de chute.
Exprimer les forces en fonction de leur intensité et du vecteur unitaire $\vec{k}$.
$\vec{P} = P \cdot \vec{k} = mg \cdot \vec{k} = \rho \cdot V \cdot g \cdot \vec{k}$
$\vec{f} = -f \cdot \vec{k}$
$\vec{P_A} = -P_A \cdot \vec{k} = -\rho_{fluide} \cdot V \cdot g \cdot \vec{k}$
Dessiner le vecteur accélération ; donner son expression en fonction de $a = \frac{dv}{dt}$ et $\vec{k}$.

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{k}$$

5. Etude dynamique :

On considère que les frottements du fluide sur le corps sont du type $f = k \cdot v$

Par application du théorème du centre d'inertie, établir que le mouvement de la bille obéit à l'équation différentielle : $\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} + \frac{k}{\rho.V} \cdot v = \mathrm{g}.(1 - \frac{\rho_f}{\rho})$

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{f} + \vec{P_A} = m \cdot \vec{a}$

soit $\rho \cdot V \cdot g \cdot \vec{k} - k \cdot v \cdot \vec{k} - \rho_{fluide} \cdot V \cdot g \cdot \vec{k} = \rho \cdot V \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \vec{k}$

et donc $$\rho \cdot V \cdot g - k \cdot v - \rho_{fluide} \cdot V \cdot g = \rho \cdot V \cdot \frac{dv}{dt}$$

d'où $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{\rho \cdot V} \cdot v = g \cdot \left(1 - \frac{\rho_{fluide}}{\rho}\right)$

Que devient cette équation différentielle si ρ_f négligeable devant ρ.

Si $\rho_{fluide} << \rho$, alors $\frac{\rho_{fluide}}{\rho} << 1$; l'équation différentielle devient : $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{\rho \cdot V} \cdot v = g$

On retrouve l'équation différentielle obtenue lorsqu'on a négligé la poussée d'Archimède.

Donner l'expression de la vitesse limite v_{lim}.

Comment varie cette vitesse si le volume du corps augmente ?

Lorsque la vitesse limite est atteinte : $\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = \frac{dv_{lim}}{dt}$

L'équation différentielle devient : d'où $\frac{k}{\rho \cdot V} \cdot v \left(1 - \frac{\rho_{fluide}}{\rho}\right)_{lim}$ $v \frac{\rho \cdot V \cdot g}{k} \left(1 - \frac{\rho_{fluide}}{\rho}\right)_{lim}$

La vitesse limite augmente lorsque le volume du corps augmente.