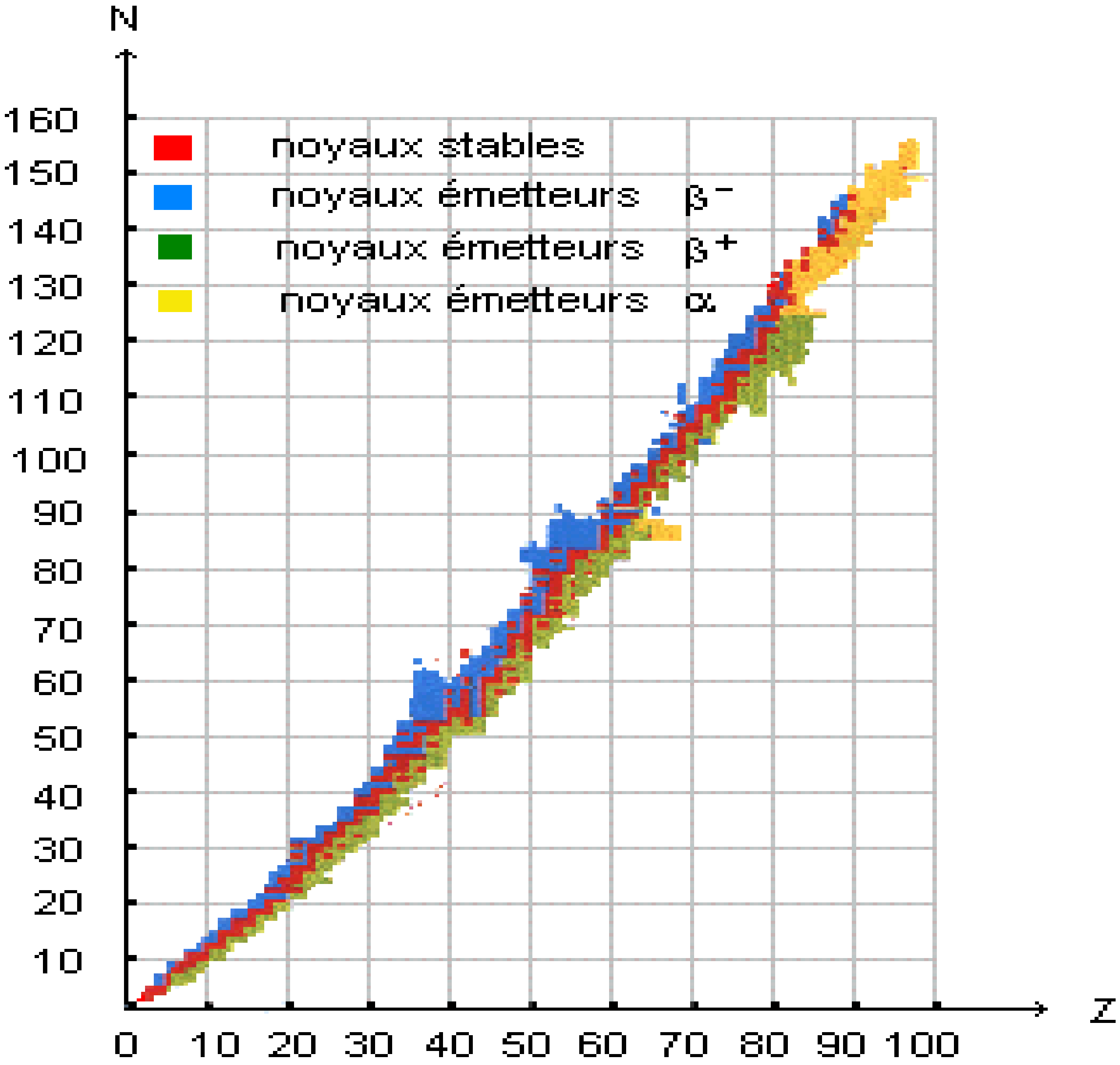
Décroissance radioactive

I. Rappel de première S : La radioactivité

- La radioactivité provient de la structure du noyau de l'atome. La plupart du temps, ce noyau constitue un édifice stable. Mais pour certains d'entre eux l'équilibre est imparfait : le noyau se transforme (on dit qu'il se désintègre), en rayonnant de l'énergie et une particule.

- Pour un élément radioactif, la désintégration est un phénomène :
  - **unique** : chaque noyau ne peut se désintégrer qu'une fois,
  - **spontané** : la désintégration ne nécessite aucune intervention extérieure ,
  - **incontrôlable** : il est impossible d'arrêter une désintégration,
  - **aléatoire** : le moment où débute la désintégration d'un noyau est indéterminé.

- Diagramme de Segré ; vallée de la stablilité
  Le nombre total de noyaux (naturels et artificiels) est d'environ 2000.
  Si l'on reporte sur un graphique le nombre de neutrons (N) en fonction du nombre de protons (Z) déterminant tous les noyaux possible, on obtient le diagramme ci-dessous :



https://www.youtube.com/watch?v=VZHpAwSGYZE

Ce graphique met en évidence 3 types de radioactivités :

- Emetteurs α : cas des noyaux « trop gros » : ils éjectent une particule α de leur noyau :
$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y* + {}^{4}_{2}He$$

- Emetteurs β^- : cas des noyaux qui possèdent trop de neutrons par rapport aux protons ; transforment 1 neutron en proton en éjectant un électron (particule β^-) et un anti-neutrino ($\bar{\nu}$)
$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}_{Z+1}^{A}Y* + {}_{-1}^{0}e + \bar{\nu}$$

- Emetteurs β^+ : cas des noyaux qui possèdent trop de protons par rapport aux neutrons ; transforment 1 proton en neutron en éjectant un positron (particule β^+) et un neutrino (ν)
$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}_{Z-1}^{A}Y* + {}_{1}^{0}e + \nu$$

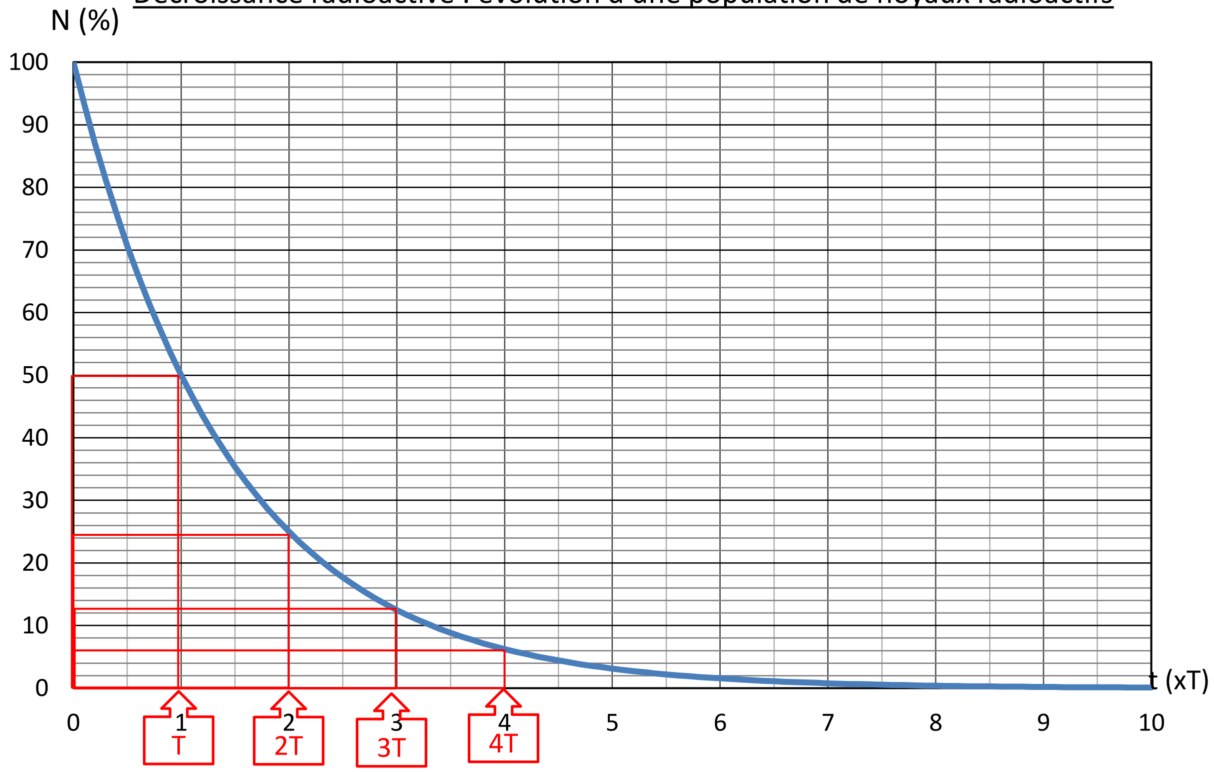
- Rayonnement γ :
Les noyaux « fils » issus des désintégrations sont souvent créés dans des états excités. Ils reviennent dans leur état fondamental en émettant un rayonnement γ
Ecriture de la réaction : $^{A}_{Z}Y* \rightarrow {}^{A}_{Z}Y + R\gamma$

II. Période radioactive :

- La période T, ou « demi-vie », est la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux radioactifs initialement présents se sont désintégrés.
Traduction mathématique : $N(T) = \frac{N_0}{2}$

- En utilisant la période radioactive, on peut tracer l'évolution d'une population de noyaux radioactifs comptant initialement 100% de noyaux :

Décroissance radioactive : évolution d'une population de noyaux radioactifs



III. Activité d'une source radioactive :

1. Quelques définitions :

- L'activité à un instant donné, notée $a(t)$, est le nombre de noyaux qui se désintègrent pendant la seconde qui suit l'instant considéré.
  Elle se mesure en Becquerel (Bq) : 1 Bq correspond à 1 désintégration par seconde.
  Exemple : $a(t) = 3000\ Bq$ signifie que dans la seconde qui suit l'instant t, 3000 noyaux de la population considérée vont se désintégrés.

- L'activité correspond au taux d'accroissement (en réalité de décroissance) d'une source radioactive.
  En conséquence, on peut la définir mathématiquement comme suit : $\boxed{a(t) = -\frac{dN}{dt}}$
  Elle est donc liée à la pente de la tangente à la courbe de décroissance à l'instant t considéré.
  (Le signe « - » permet d'obtenir une valeur positive de l'activité).

- Par ailleurs et tout à fait logiquement, l'activité est proportionnelle aux nombres de noyaux radioactifs contenus dans l'échantillon étudié.
  Ceci se traduit par la relation : $\boxed{a(t) = \lambda . N(t)}$
  Où λ est la constante radioactive qui traduit la probabilité de désintégration des noyaux.
  Exemple : Dans une population d'un grand nombre de noyaux de ^{14}C, 1 sur 8036 va se désintégrer en 1 année. Ceci se note : $\lambda(^{14}C) = \frac{1}{8036}\ an^{-1}$

2. Evolution d'une population : loi de décroissance

On cherche à établir l'expression de la fonction mathématique $N(t)$ appelée « loi de décroissance » qui décrit l'évolution d'une population de noyaux radioactifs en fonction du temps.
On considère que $t = 0$, la population compte N_0 noyaux.

a. Montrer que $N(t)$ vérifié une équation différentielle du type $\frac{dN}{dt} + k.N = 0$. Déterminer k.

On a d'une part $a(t) = -\frac{dN}{dt}$ et d'autre part $a(t) = \lambda.N$

On peut donc en déduire que $-\frac{dN}{dt} = \lambda.N$

D'où $\frac{dN}{dt} + \lambda.N = 0$

On en déduit que $k = \lambda$.

b. Résoudre cette équation : trouver une expression mathématique de la fonction $N(t)$ qui qui vérifie cette équation.

On peut écrire l'équation différentielle de la façon suivante : $\frac{\frac{dN(t)}{dt}}{N(t)} = -\lambda$ $\left(\frac{N'(t)}{N(t)} = -\lambda\right)$

La fonction $\frac{N'(t)}{N(t)}$ est la dérivée de la fonction $\ln N(t)$.

On peut donc intégrer l'équation de chaque côté (chercher la primitive) :

$$\ln N(t) = -\lambda . t + A$$

où A est une constante d'intégration

Pour « éliminer » la fonction ln, on applique la fonction exponentielle de chaque côté :

$$e^{\ln N(t)} = e^{-\lambda . t + A}$$
$$N(t) = e^{A}.e^{-\lambda.t} = K.e^{-\lambda.t}$$

c. Déterminer la constante d'intégration

à $t = 0$, $N(0) = N_0$

or, d'après l'expression établie : $N(0) = K.e^{-\lambda.0} = K$

On en déduit que : $K = N_0$

Conclusion : $N(t) = N_0 \,.\, e^{-\lambda . t}$

Si on trace la représentation graphique de $N(t)$, on retrouve la courbe établie précédemment.

3. Relation entre T et λ :

Par définition de la période : $N(T) = \frac{N_0}{2}$
Or, à partir de la loi de décroissance : $N(t) = N_0 . e^{-\lambda . T}$
On a donc : $\frac{N_0}{2} = N_0 . e^{-\lambda . T}$
Soit $e^{-\lambda . T} = \frac{1}{2}$
Appliquons la fonction ln de chaque côté :

$$-\lambda . T = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

D'où $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$
Calculer la période radioactive du ^{14}C : $T = \frac{\ln 2}{\frac{1}{8036}} = 8036 \times \ln 2 = 5570 \; an$

4. Montrer que l'activité suit également la loi de décroissance :

$$a(t) = a_0 . e^{-\lambda . t}$$

$a(t) = \lambda . N(t)$ (et donc, à l'instant initial : $a_0 = \lambda . N_0$)
Avec la loi de décroissance, on a $a(t) = \lambda . N_0 \,.\, e^{-\lambda . t} = a_0 \,.\, e^{-\lambda .\, t}$

IV. Application : datation

En 1983 fut découverte l'épave d'un drakkar dans la vase du port de Roskilde (à l'ouest de Copenhague). Pour valider l'hypothèse indiquant que ce navire était d'origine viking, une datation au carbone 14 est réalisée sur un échantillon de bois prélevé sur sa coque.
L'activité mesurée pour cet échantillon est de 0,200 Bq par gramme de carbone. Or l'activité pour 1 gramme de carbone participant au cycle du carbone de l'atmosphère est égale à a_0 = 0,227 Bq.
La période viking s'étend de VIII$^{\text{ème}}$ au XI$^{\text{ème}}$ siècle. L'hypothèse faite précédemment est-elle vérifiée ?

Calculons la durée écoulée entre la fabrication du drakkar et sa découverte :

$$a(t) = a_0 \,.\, e^{-\lambda . t}$$
$$e^{-\lambda . t} = \frac{a(t)}{a_0}$$
$$-\lambda . t = \ln\left(\frac{a(t)}{a_0}\right)$$
$$t = -\frac{1}{\lambda} . \ln\left(\frac{a(t)}{a_0}\right) = \frac{1}{\lambda} . \ln\left(\frac{a_0}{a(t)}\right)$$

A.N. $t = 8036 \times \ln\left(\frac{0{,}227}{0{,}200}\right) = 1{,}02 \times 10^3 \; an$

Evaluons l'année de la construction :

$$1983 - 1{,}02 \times 10^3 = 9{,}7 \times 10^2 \; an$$

Ce qui correspond au X$^{\text{ème}}$ siècle qui correspond bien à la période viking.