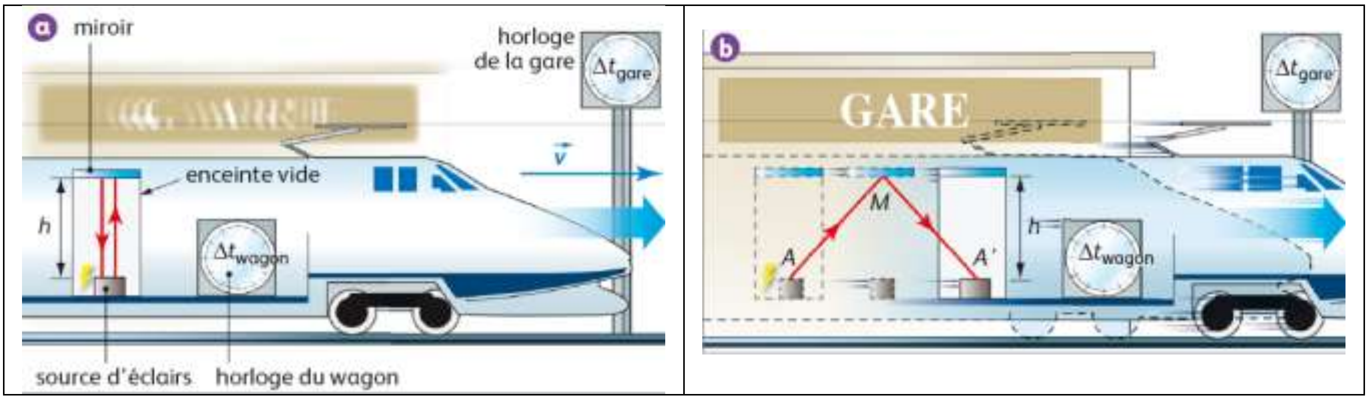
Temps et relativité restreinte

I. Relation entre durée propre et durée mesurée :

Imaginons l'expérience de pensée suivante : dans le wagon d'un train, on a placé une enceinte où on a fait le vide. Cette enceinte contient une source d'éclairs lumineux placée au sol et un miroir placé à la verticale de cette source, à une distance *h*.



Ce wagon passe devant la gare avec une vitesse *v* constante. Dans le wagon, un dispositif avec une horloge très précise permet de mesurer la durée Δt_{wagon} de propagation d'un éclair depuis son émission jusqu'à son retour au point de départ (figure a).
Sur le quai de la gare, un autre dispositif avec une horloge tout aussi précise permet de mesurer la durée Δt_{gare} du trajet aller-retour du même éclair (figure b).

1. Montrer que la durée Δt_{gare} de l'aller-retour d'un éclair, mesurée par l'horloge de la gare, est supérieure à la durée Δt_{wagon} du même aller-retour, enregistrée par l'horloge du wagon.

   Exprimons les 2 durées :
   $\Delta t_{wagon} = \frac{2h}{c}$ $\Delta t_{gare} = \frac{AM+MA'}{c}$
   Or 2h < AM+AM', on en déduit donc que $\Delta t_{wagon} < \Delta t_{gare}$

2. On raisonne en se plaçant dans le référentiel du wagon.
   Exprimer *h* en fonction de Δt_{wagon} et *c*.
$$h = c \cdot \frac{\Delta t_{wagon}}{2}$$
3. On raisonne maintenant en se plaçant dans le référentiel de la gare :
   a. Exprimer la distance *AA'* en fonction de Δt_{gare} et de *v*, puis les distances *AM* et *A'M* en fonction de Δt_{gare} et *c*
$$AA' = V \cdot \Delta t_{gare}$$
$$AM = A'M = c \cdot \frac{\Delta t_{gare}}{2}$$

   b. Exprimer les distances *AM* et *A'M* en fonction de *h* et de *AA'*.
$$AM^2 = AM'^2 = h^2 + \left(\frac{AA'}{2}\right)^2$$

4. En déduire que les durées mesurées dans le référentiel du wagon et dans le référentiel de la gare sont liées par la relation :
$$\Delta t_{gare} = \frac{\Delta t_{wagon}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

A partir de $AM^2 = h^2 + \left(\frac{AA\prime}{2}\right)^2$:

$$\left(c \cdot \frac{\Delta t_{gare}}{2}\right)^2 = \left(c \cdot \frac{\Delta t_{wagon}}{2}\right)^2 + \left(\frac{V \cdot \Delta t_{gare}}{2}\right)^2$$

soit $$\left(c \cdot \Delta t_{gare}\right)^2 = \left(c \cdot \Delta t_{wagon}\right)^2 + \left(V \cdot \Delta t_{gare}\right)^2$$

et $$\Delta t_{gare}{}^2 \cdot (c^2 - V^2) = c^2 \cdot \Delta t_{wagon}{}^2$$

ou bien $$\Delta t_{gare}{}^2 = \frac{c^2}{(c^2 - V^2)} \cdot \Delta t_{wagon}{}^2$$

soit $$\Delta t_{gare} = \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}} \cdot \Delta t_{wagon}$$

II. Le paradoxe des jumeaux

Fixe et Mobile sont les prénoms de deux frères jumeaux. Ils habitent la planète Galileo, isolée dans l'Univers, et dont on peut supposer que la surface définit un référentiel galiléen.
A l'âge de 20 ans, tandis que Fixe reste sur Galileo, son frère Mobile, lui monte à bord d'un véhicule qui se déplace à une vitesse $v = 2{,}0\times10^8 m.s^{-1}$, proche de la célérité de la lumière. Pendant 7 années, il s'éloigne de Galileo.
Pendant les 7 années suivantes, il revient voir son frère. Ces durées sont celles mesurées par Mobile.

1. On admet que la relativité restreinte ne s'applique qu'à condition de choisir le référentiel non galiléen comme référentiel propre.
   Lequel des deux jumeaux est le plus âgé ?
   Le référentiel lié à Mobile n'est pas galiléen (subit des accélérations). On choisit donc Mobile comme référentiel propre.
   $\Delta t_p = \Delta t_M$ d'où $\Delta t_F = \frac{\Delta t_M}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ et donc $\Delta t_F > \Delta t_M$
   Fixe vieillit plus vite.

2. En déduire l'âge de *Mobile* et l'âge de *Fixe* au moment de leurs retrouvailles.
   $\Delta t_p = 7 + 7 = 14\ ans$ d'où $\Delta t_F = \frac{14}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}} = 18{,}8\ ans$
   Mobile a 34 ans
   Fixe a 39 ans

3. Pourquoi peut-on dire que Mobile voyage dans le futur ? Mobile peut-il revenir dans le passé ?

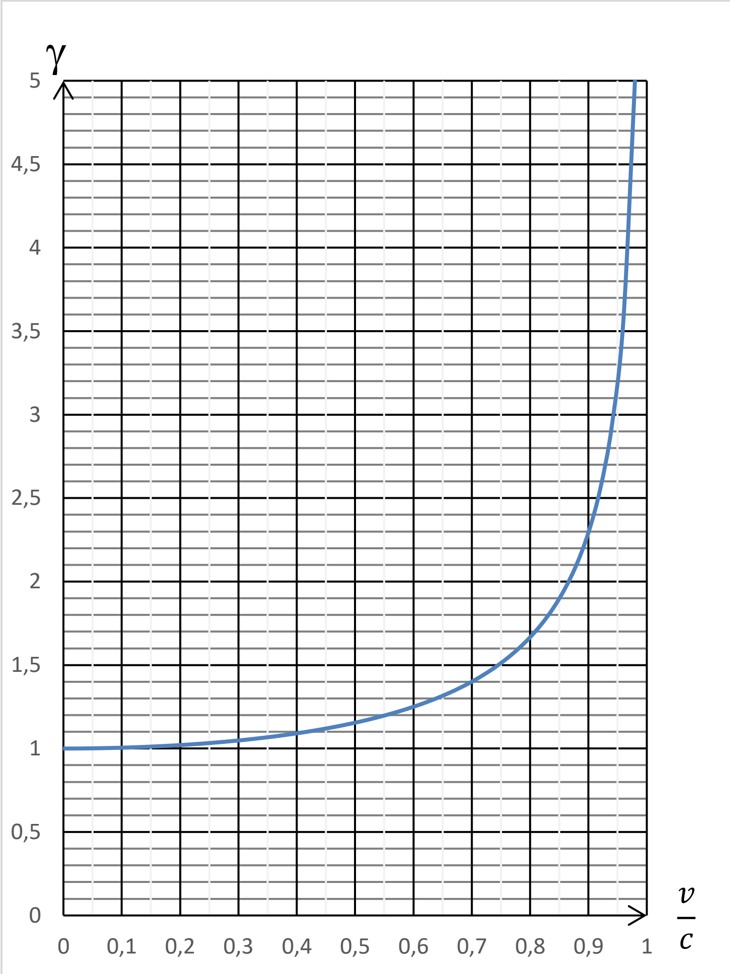
III. Limite de la théorie Newtonienne

1. On considère que la mécanique newtonienne reste applicable tant que la durée mesurée diffère de moins de 1 % de la durée propre, ce qui se traduit par $\Delta t_p > 0{,}99.\Delta t_m$
   En déduire le critère sur γ pour que la mécanique newtonienne puisse s'appliquer.

$$\Delta t_p > 0{,}99.\Delta t_m$$
$$\frac{1}{\gamma} > 0{,}99$$
$$\gamma < 1{,}01$$

2. A partir du graphe suivant, définir la vitesse limite au-delà de la laquelle on doit tenir compte de la relativité du temps. Conclure quant aux vitesses usuelles.

3. Indiquer si chacune de ces vitesses est relativiste ou non



Horloge embraquée sur…	v ($km.h^{-1}$)	v ($m.s^{-1}$)	Relativiste ?
TGV	300		
Airbus A380	900		
Ariane	8000		
Satellite GPS	14000		
Apollo 11	40000		
Particule α		10^7	
Electrons dans un microscope électronique		$1{,}5\times10^8$	
Proton accéléré		299762455	

4. Dans les systèmes de positionnage GPS et Galileo, on mesure des durées τ de parcours de signaux électromagnétiques pour calculer des distances : $d = c\,\tau$.
   On suppose que, parmi tous les paramètres intervenant dans le fonctionnement de ces systèmes, seule la dilatation du temps n'ait pas été prise en compte.

   a. Quel serait, au bout d'une heure de fonctionnement, l'écart entre l'indication d'une horloge atomique terrestre et celle d'une horloge atomique embarquée dans le satellite du système GPS mentionné dans le tableau ?

      L'écart relatif entre le temps propre et le temps mesuré est de $8{,}4\times10^{-9}$ % à cette vitesse, soit un écart absolu : $\Delta t_m - \Delta t_p = 8{,}4\times10^{-9} / 100 \times (24\times3600) = 7{,}3\times10^{-6}$ s au bout d'1 heure de fonctionnement (mesurée par l'horloge embarquée).

      ou bien
      Le satellite géostationnaire a une vitesse V = $3{,}9\times10^{3}$ $m.s^{-1}$ d'après le tableau ci-dessus.

$$\Delta t_m - \Delta t_p = \frac{\Delta t_p}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \Delta t_p = \Delta t_p \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - 1\right)$$

A.N. $\Delta t_m - \Delta t_p = 24 \times 3600 \times \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(3,9\times10^3)^2}{(3,0\times10^8)^2}}} - 1 \right) = 7,3 \times 10^{-6} s$

L'horloge embarquée retarde de 7,3 µs

b. Quelle erreur sur la distance satellite-véhicule mesurée par le système GPS correspond à cet écart ? Est-elle acceptable par les utilisateurs ?

La précision sur la mesure de durée est donc de ± 7,3 µs
L'erreur sur la distance satellite-véhicule mesurée est donc la distance parcourue pendant la durée de 7,3 µs soit : d = ± 3,0×10^{8} *× 7,3×10*$^{-6}$ *= 2,2×10*^{3} *m soit une distance supérieure à 2km !*

Cette distance n'est pas acceptable pour les utilisateurs. Il faut donc tenir compte des effets relativistes.

IV. Confirmation expérimentale de la dilatation des durées – durée de vie du muon

Le muon est une particule qui porte la même charge électrique que l'électron, mais avec une masse 207 fois plus grande, c'est pourquoi on l'appelle aussi électron lourd.
Les muons sont produits par l'interaction entre les rayons cosmiques émis par le Soleil et la haute atmosphère de la Terre, à une altitude d'environ 10 km.
Un muon au repos se désintègre en moyenne au bout d'une durée de valeur τ = 2,2 µs. Les muons émis dans la haute atmosphère le sont avec une vitesse égale à 99,8 % de la célérité de la lumière dans le vide.
On considère souvent que le fait de pouvoir détecter des muons à la surface de la Terre est une preuve expérimentale de la dilatation des durées. Cette partie propose de comprendre cette affirmation.

1. Pourquoi la durée de vie du muon indiquée dans le texte est-elle sa durée de vie propre ?
   Cette durée de vie est mesurée au repos, donc dans le référentiel propre du muon.

2. Calculer la distance parcourue par un muon pendant 2,2 µs.

   $d = V \cdot \Delta t$ A.N. $d = \frac{99,8}{100} \times 3,00 \times 10^8 \times 2,2 \times 10^{-6} = 6,6 \times 10^2 m$

3. Pourquoi le fait que des muons parviennent à la surface de la Terre est-il une preuve expérimentale de la dilatation des durées ?

   La distance parcourue depuis l'endroit où ils sont produits dans la haute atmosphère pour nous parvenir est d'environ 10km soit environ 15 fois supérieure à la durée de vie des muons.
   Les muons franchissent une distance beaucoup plus élevée : cela est compatible avec l'idée selon laquelle, vus de la Terre, leur durée de vie moyenne, lorsqu'ils sont en mouvement, se dilate.

4. En tenant compte de la dilatation des durées, calculer la distance que parcourt, en moyenne, un muon, avant de se désintégrer. On prendra bien soin de définir les événements considérés et durée propres et durée mesurée depuis la Terre. Montrer que ce calcul permet d'interpréter le fait de pouvoir détecter des muons à la surface de la Terre.

   La durée de vie propre du muon, dans le référentiel liée au muon, est : Δt_p = 2,2µs
   La durée de vie du muon mesurée dans le Terre est : $\Delta t_m = \frac{\Delta t_p}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

   A.N. $\Delta t_m = \frac{2,2}{\sqrt{1-(0,998)^2}} = 35 \mu s$

Calculons la distance parcourue pendant cette durée :

$d' = V \cdot \Delta t_m$ A.N. $d' = \frac{99{,}8}{100} \times 3{,}00 \times 10^8 \times 35 \times 10^{-6} = 1{,}0 \times 10^4 m$

Cette distance permet d'interpréter que les muons peuvent franchir une distance assez grande dans l'atmosphère pour que nous puissions les détecter au sol.