GALILEO

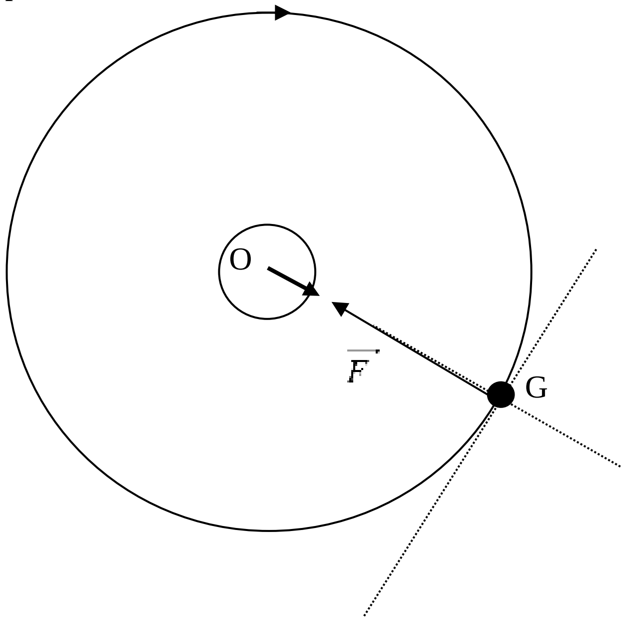
Connaître sa position exacte dans l'espace et dans le temps, autant d'informations qu'il sera nécessaire d'obtenir de plus en plus fréquemment avec une grande fiabilité. Dans quelques années, ce sera possible avec le système de radionavigation par satellite GALILEO, initiative lancée par l'Union européenne et l'Agence spatiale européenne (ESA). Ce système mondial assurera une complémentarité avec le système actuel GPS (Global Positioning System).
GALILEO repose sur une constellation de trente satellites et des stations terrestres permettant de fournir des informations concernant leur positionnement à des usagers de nombreux secteurs (transport, services sociaux, justice, etc…).
Le premier satellite du programme, Giove-A, a été lancé le 28 décembre 2005.

D'après le site http://www.cnes.fr/

DONNEES :
Constante de gravitation : $G = 6{,}67\times10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}
La Terre est supposée sphérique et homogène. On appelle O son centre, sa masse $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg *et son rayon* $R_T = 6{,}38\times10^3$ km
Le satellite Giove-A est assimilé à un point matériel G de masse $m_{sat} = 700$ kg. *Il est supposé soumis à la seule interaction gravitationnelle due à la Terre, et il décrit de façon uniforme un cercle de centre O, à l'altitude* $h = 23{,}6\times10^3$ km.

A. Mouvement du satellite Giove-A autour de la Terre

1.1. Sans souci d'échelle, faire un schéma représentant la Terre, le satellite sur sa trajectoire et la force exercée par la Terre sur le satellite.



1.2. En utilisant les notations du texte, donner l'expression vectorielle de cette force.
On notera $\vec{u}$ le vecteur unitaire dirigé de O vers G.

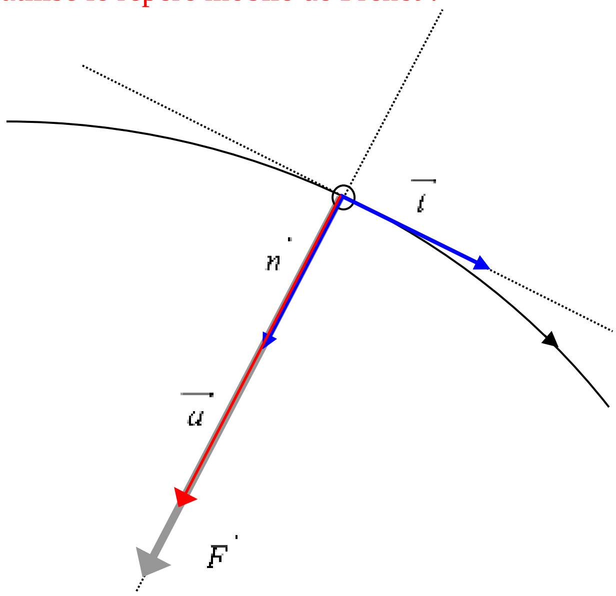
$$\vec{F} = -G\cdot\frac{M_T\cdot m_{sat}}{(R_T+h)^2}\cdot\vec{u}$$

2.1. Dans quel référentiel le mouvement du satellite est-il décrit ?
Il s'agit du référentiel géocentrique.

2.2. Quelle hypothèse concernant ce référentiel faut-il faire pour appliquer la seconde loi de Newton ?
IL faut supposer que le référentiel est galliléen.

2.3. En appliquant la seconde loi de Newton au satellite, déterminer l'expression du vecteur-accélération $\vec{a}$ du point G.

On utilise le repère mobile de Frénet :



Bilan des forces sur le satellite :

La seule force s'exerçant sur le satellite est la force d'interaction gravitationnelle $\vec{F}$

Coordonnées de $\vec{F}$ dans le repère mobile de Frénet :

$$\vec{F}\left|\begin{array}{l} 0 \\ F = G\cdot\dfrac{m\cdot M_T}{(R_T+h)^2}\end{array}\right.$$

où m est la masse du satellite et M_T la masse de la Terre (plus généralement de l'astre attracteur)

D'après la deuxième loi de Newton

$$\vec{F} = m\cdot\vec{a}$$

D'où $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$

D'où les coordonnées de $\vec{a}$ dans le repère de Frénet :

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_t = 0 \\ a_n = G\cdot\dfrac{M_T}{(R_T+h)^2}\end{array}\right.$$

3.1. Donner les caractéristiques du vecteur-accélération $\vec{a}$ d'un point matériel ayant un mouvement circulaire uniforme.

Le vecteur accélération est centripète et radial.

3.2. Montrer alors que la vitesse v du satellite est telle que : $v^2 = G\dfrac{M_T}{R}$ avec $R = R_T + h$

les coordonnées générales de l'accélération dans le repère de Frénet sont : $\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_t = \dfrac{dv}{dt} \\ a_n = \dfrac{v^2}{R_T+h}\end{array}\right.$

On a donc :

suivant $\vec{t}$: $\dfrac{dv}{dt} = 0$ ce qui implique que la valeur de la vitesse est bien constante.

suivant $\vec{n}$: $\dfrac{v^2}{R_T+h} = G\cdot\dfrac{M_T}{(R_T+h)^2}$ soit $v = \sqrt{G\cdot\dfrac{M_T}{R_T+h}}$

4.1. Définir la période de révolution T du satellite.

Donner son expression en fonction de G, M_T et R.

La période du satellite est la durée d'un tour.

$$T = \frac{périmètre\,de\,la\,trajectoire}{vitesse} = \frac{2\pi(R_T+h)}{v}$$

$$T = \frac{2\pi(R_T+h)}{\sqrt{\dfrac{GM_T}{R_T+h}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_T}}\cdot\sqrt{(R_T+h)^3}$$

4.2.Calculer la période T.

A.N. $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{6{,}67.10^{-11} \times 5{,}98.10^{24}}} \times \sqrt{\left(6{,}38.10^{6} + 23{,}6.10^{6}\right)^{3}} = 5{,}16.10^{4}\,s$ soit 14,3 heures

A. Comparaison avec d'autres satellites terrestres

Il existe actuellement deux systèmes de positionnement par satellites : le système américain GPS *et le système russe* GLONASS.
Le tableau fourni rassemble les périodes T *et les rayons* R *des trajectoires des satellites correspondants, ainsi que les données relatives aux satellites de type Météosat.*
Ces données permettent de tracer la courbe donnant T^2 en fonction de R^3.

1.1. Compléter la ligne du tableau relative au satellite Giove-A (GALILEO).
1.2. Placer le point correspondant dans le système d'axes proposés sur l'annexe et tracer la courbe donnant T^2 en fonction de R^3.

2.1.Que peut-on déduire du tracé précédent ? Justifier.
On obtient une droite croissante passant par l'origine. Le carré de la période est donc proportionnel au cube du rayon : $T^2=k.R^3$ avec $k=10^{-4}$

2.2.Montrer que le résultat de la question A-4.1. est conforme au tracé obtenu.

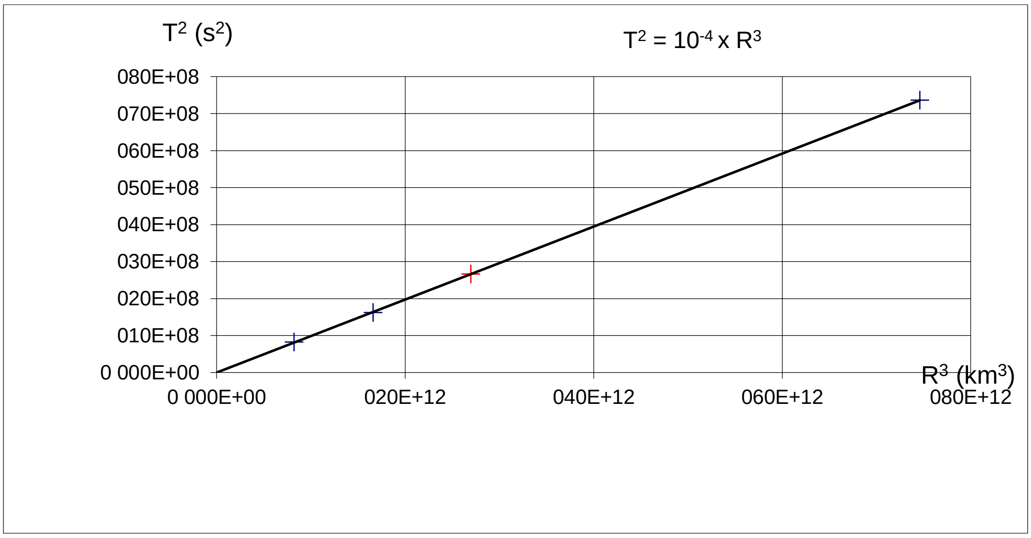
D'après l'expression de la période, on a bien : $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM_T} \cdot (R_T + h)^3$

Calculons $\dfrac{4\pi^2}{GM_T} = 10^{-13}\,s^2.m^{-3}$ soit 10^{-4} $s^2.km^{-3}$, ce qui coïncide avec la pente de la droite.

2.3.Comment nomme-t-on la loi ainsi mise en évidence ?
Il s'agit de la troisième loi de Képler.

Satellite	Rayon de la trajectoire R (km)	Période de révolution T (s)	R^3 (km^3)	T^2 (s^2)
GPS	$20{,}2\times10^3$	$2{,}88\times10^4$	$8{,}24\times10^{12}$	$8{,}29\times10^8$
GLONASS	$25{,}5\times10^3$	$4{,}02\times10^4$	$1{,}66\times10^{13}$	$1{,}62\times10^9$
GALILEO	$30{,}0\times10^3$	$5{,}16\times10^4$	$2{,}70\times10^{13}$	$2{,}66\times10^9$
METEOSAT	$42{,}1\times10^3$	$8{,}58\times10^4$	$7{,}46\times10^{13}$	$7{,}36\times10^9$

COURBE DONNANT T^2 EN FONCTION DE R^3 :



DETERMINATION DE LA MASSE DE PLUSIEURS ASTRES

A. Texte “L’univers dans la balance”

On sait que l’étude du mouvement de chute d’un objet de masse m, soumis à l’attraction gravitationnelle d’un astre de masse M, permet de déterminer cette masse M, si l’on a au préalable déterminé la valeur de la constante universelle G. *Mais, en dehors de notre planète, l’expérience n’est guère réalisable ! Heureusement, un exemple de chute est fourni par un satellite ; s’il ne tombe pas, c’est parce que la vitesse initiale, qui lui a été communiquée perpendiculairement à la verticale le tient éloigné de la planète qui l’attire. Son mouvement suit la troisième loi de Képler qui indique :* $T^2 / a^3 = C^{te}$. *La* C^{te} *fait intervenir le facteur* (M+*m*)*, mais si* M *est très grand devant m, on peut ne prendre en compte que* M. *Ainsi, la mesure de a et de* T *permet de déterminer* M. *On a réalisé une véritable balance cosmique !*

B. Données

- Constante de gravitation universelle : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ M.m^2.kg^{-1}
- intensité de la pesanteur à la surface de la Terre : $g_0 = 9{,}81$ m.s^{-2}
- rayon terrestre : $R = 6{,}37 \times 10^6$ m

	rayon de l’orbite (considérée comme circulaire)	période de révolution
Jupiter (/ Soleil)	$r_J = 7{,}78 \times 10^{11}$ m	$T_J = 3{,}74 \times 10^8$ s
Io (/ Jupiter)	$r_{io} = 4{,}22 \times 10^8$ m	$T_{io} = 1{,}53 \times 10^5$ s
Lune (/ Terre)	$r_L = 3{,}84 \times 10^8$ m	$T_L = 2{,}36 \times 10^6$ s

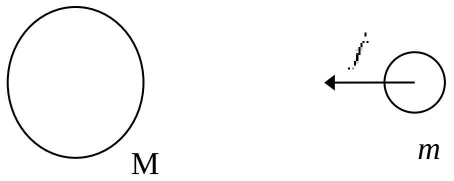
note : Io est un satellite de Jupiter

C. Questions :

I. Etude préliminaire

(Ces relations seront utilisées dans la suite de l’exercice).

1. La force gravitationnelle qu’un astre de masse M à symétrie sphérique exerce sur un corps de masse *m* également à symétrie sphérique a une intensité :



$$f = G\frac{Mm}{r^2}$$

1.1. Que représente r ?

r représente la distance entre les centres des deux astres.

1.2. L’astre de masse M est-il soumis à une force ? Si oui, indiquer ses caractéristiques.

Il est soumis à la force $-\vec{f}$, selon le troisième principe (principe d’interaction).

Dans la suite de l’exercice, tous les corps étudiés auront la symétrie sphérique et pourront être assimilés à des objets ponctuels.

2. A quelle force s’apparente la force gravitationnelle à la surface de la Terre. En déduire une expression de l’intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre.

La force s’apparente au poids : $f = P$

Avec $f = G\dfrac{Mm}{r^2}$ et $P = mg$ d'où $mg = G\dfrac{Mm}{r^2}$ soit $g = G\dfrac{M}{r^2}$

A la surface de la Terre : $g_0 = G\dfrac{M_T}{{R_T}^2}$

3.1. Dans le cas d'un mouvement à rotation circulaire, de rayon *r*, d'un satellite de masse *m*, soumis à l'attraction gravitationnelle d'un astre de masse M (M >> *m*), montrer que la vitesse V reste constante.

<u>Bilan des forces sur le satellite :</u>

La seule force s'exerçant sur le satellite est la force d'interaction gravitationnelle $\vec{F}$

Coordonnées de $\vec{F}$ dans le repère mobile de Frénet <u>(schéma similaire à l'exercice précédent)</u>:

$$\vec{F}\left|\begin{array}{l} 0 \\ F = G\cdot\dfrac{m\cdot M}{r^2}\end{array}\right.$$

où m est la masse du satellite et M_T la masse de la Terre (plus généralement de l'astre attracteur)

D'après la deuxième loi de Newton

$$\vec{F} = m\cdot\vec{a}$$

D'où $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$

D'où les coordonnées de $\vec{a}$ dans le repère de Frénet :

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_t = 0 \\ a_n = G\cdot\dfrac{M}{r^2}\end{array}\right.$$

Or les coordonnées générales de l'accélération dans le repère de Frénet sont : $\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_t = \dfrac{dv}{dt} \\ a_n = \dfrac{v^2}{r}\end{array}\right.$

On a donc :

suivant $\vec{t}$: $\dfrac{dv}{dt} = 0$ ce qui implique que la valeur de la vitesse est bien constante.

3.2. Etablir l'expression de la vitesse du satellite.

suivant $\vec{n}$: $\dfrac{v^2}{r} = G\cdot\dfrac{M}{r^2}$ soit $v = \sqrt{G\cdot\dfrac{M}{r}}$

3.3. Dans l'hypothèse où la masse du satellite est différente de *m*, par exemple, *m*' = 3*m*, indiquer, en le justifiant, si la vitesse est modifiée ou non.

La vitesse n'est pas modifiée puisqu'elle ne dépend pas de la masse du satellite.

4. Dans les hypothèses des questions précédentes, la trajectoire circulaire et M très grand devant *m*, montrer que la loi de Kepler est bien vérifiée et donner l'expression de la constante à laquelle il est fait allusion dans le texte.

Définition de la période du satellite : durée d'un tour

$$T = \frac{\text{périmètre de la trajectoire}}{\text{vitesse}} = \frac{2\pi r}{v}$$

$$T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\dfrac{GM}{r}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}\cdot\sqrt{r^3}$$

Vérifier la troisième loi de Kepler : le carré de la période des objets en orbite est proportionnel au cube du demi grand axe de leur trajectoire.

D'après l'expression établie précédemment :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot r^3$$ Ceci traduit bien la troisième loi de Képler.

5. Donner les expressions de la masse du Soleil et de Jupiter et calculer leurs valeurs.
   Montrer, *a posteriori*, que l'hypothèse M >> *m* est bien vérifiée pour l'un des calculs effectués.

   Expression générale de l'astre attracteur : $M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$

   Pour calculer la masse du Soleil, on considère un des ses satellites : Jupiter : $M_S = \frac{4\pi^2 r_J{}^3}{GT_J{}^2}$

   A.N : $M_S = 1{,}99.10^{30}$ kg

   Pour calculer la masse de Jupiter, on considère un de ses satellites : Io : $M_J = \frac{4\pi^2 r_{Io}{}^3}{GT_{Io}{}^2}$

   A.N. : $M_J = 1{,}90.10^{27}$ kg

   Vérification hypothèse : $\frac{M_S}{M_J} = \frac{1{,}99.10^{30}}{1{,}90.10^{27}} \approx 1000$ La masse du Soleil est 1000× plus importante que la masse de Jupiter. L'hypothèse est bien vérifiée.

6. En utilisant les indications du texte et en sachant que la Lune est un astre dont la masse n'est pas négligeable devant celle de la Terre, donner la bonne expression de la loi de Kepler.
   En déduire une valeur approchée de la masse M_L de notre satellite naturel (la méthode proposée ici, compte tenu de la précision des données, ne donne pas un résultat précis).

   D'après l'énoncé, la loi de Képler s'exprime : $T_L{}^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_T + M_L)} \cdot r_L{}^3$

   et donc $M_T + M_L = \frac{4\pi^2 r_L{}^3}{GT_L{}^2}$ A.N. $M_T + M_L = 6{,}02.10^{24}$ kg

   Calcul de la masse de la Terre : dans la question 2. on a montré que $g_0 = G\frac{M_T}{R_T{}^2}$

   On en déduit que $M_T = \frac{g_0 \cdot R_T{}^2}{G}$ A.N. $M_T = 5{,}98.10^{24}\,kg$

   D'où $M_L = 4.10^{22}$ kg

ÉTUDE DE SATELLITES D'OBSERVATION

Les satellites d'observation sont des objets spatiaux en orbite circulaire autour de la Terre. Leur mission principale est d'effectuer des observations de l'atmosphère, des océans, des surfaces émergées et des glaces, et de transmettre à une station terrestre les données ainsi obtenues.

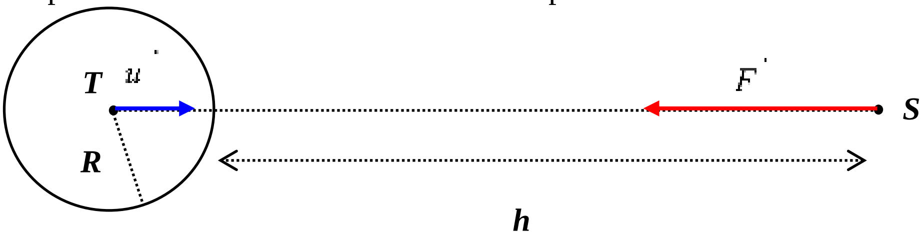
1. ENVISAT : un satellite circumpolaire.
   C'était le plus gros satellite européen d'observation lors de son lancement le 1er mars 2002. Ses capteurs peuvent recueillir des données à l'intérieur d'une bande de largeur au sol de 3000 km permettant une observation biquotidienne de l'ensemble de la planète.

   <u>Données :</u> Constante de gravitation universelle : G = $6{,}67 \times 10^{-11}$ USI
   ENVISAT : masse : m = 8200 kg
   altitude moyenne : h = 800 km
   orbite contenue dans un plan passant par les pôles
   TERRE : masse : M = $5{,}98 \times 10^{24}$ kg
   rayon : R = $6{,}38 \times 10^3$ km

période de rotation propre : 1436 minutes

1.1. On rappelle l'expression de la valeur de la force d'interaction gravitationnelle entre deux corps de masse m_A et m_B, de centres A et B, de répartition de masse à symétrie sphérique, distants de d = AB : $F = G.\frac{m_A m_B}{d^2}$

1.1.1. Représenter sur la **figure** la force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre (sa répartition de masse étant supposée à symétrie sphérique) sur le satellite supposé ponctuel et noté S. Donner l'expression vectorielle de cette force en représentant le vecteur unitaire choisi sur la figure.



1.1.2. Calculer la valeur de cette force.

$$F = 6{,}67.10^{-11} \cdot \frac{8200 \times 5{,}98.10^{24}}{(6{,}38.10^{6} + 800.10^{3})^2} = 6{,}34.10^{4}\ N$$

1.2. En considérant la seule action de la Terre, établir l'expression vectorielle de l'accélération du satellite dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen, en fonction de M, h et R.

<u>Bilan des forces sur le satellite :</u>

La seule force s'exerçant sur le satellite est la force d'interaction gravitationnelle $\vec{F}$

Coordonnées de $\vec{F}$ dans le repère mobile de Frénet :

$$\vec{F} \left| \begin{array}{l} 0 \\ F = G \cdot \dfrac{m \cdot M}{(R_T + h)^2} \end{array} \right.$$

où m est la masse du satellite et M_T la masse de la Terre (plus généralement de l'astre attracteur)

D'après la deuxième loi de Newton

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

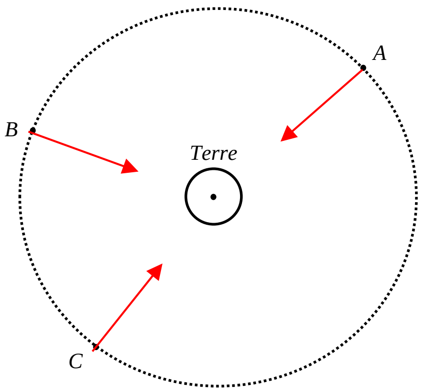
D'où $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$

D'où les coordonnées de $\vec{a}$ dans le repère de Frénet :

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_t = 0 \\ a_n = G \cdot \dfrac{M}{(R_T + h)^2} \end{array} \right.$$

1.3. Sur la figure suivante, représenter, sans souci d'échelle, le vecteur accélération à trois dates différentes correspondant aux positions A, B et C du satellite.

Le vecteur accélération est radial et centripète ; son intensité est constante.



1.4. Montrer que, dans le cas d'un mouvement circulaire, dont on admettra sans démonstration qu'il est uniforme,

la vitesse du satellite a pour expression : $v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$.

Les coordonnées générales de l'accélération dans le repère de Frénet sont : $\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_t = \dfrac{dv}{dt} \\ a_n = \dfrac{v^2}{r} \end{array}\right.$

On a donc :

suivant $\vec{t}$: $\dfrac{dv}{dt} = 0$ ce qui implique que la valeur de la vitesse est bien constante.

suivant $\vec{n}$: $\dfrac{v^2}{r} = G \cdot \dfrac{M}{r^2}$ soit $v = \sqrt{G \cdot \dfrac{M}{r}}$

1.5.Calculer la vitesse du satellite en km.s^{-1}.

v=7,91 km.s^{-1}

1.6.Donner l'expression de la période de révolution du satellite en fonction de sa vitesse et des caractéristiques de la trajectoire R et h. Puis calculer sa valeur.

$$T = \frac{périmètre\,de\,la\,trajectoire}{vitesse} = \frac{2\pi(R_T + h)}{v}$$

A.N. T=5,70.10^{3}s soit 1,6 heure

2. METEOSAT 8 : un satellite géostationnaire.

Ce satellite a été lancé par ARIANE 5 le 28 août 2002. Il est opérationnel depuis le 28 janvier 2004.
La position d'un satellite géostationnaire parait fixe aux yeux d'un observateur terrestre. Situé à une altitude H voisine de 36000 km, il fournit de façon continue des informations couvrant une zone circulaire représentant environ 42% de la surface de la Terre.

2.1.Donner les trois conditions à remplir par METEOSAT 8 pour qu'il soit géostationnaire.

Trajectoire circulaire, contenue dans le plan de l'équateur terrestre, de période égale à la période de révolution de la Terre.

2.2.Troisième loi de Képler dans le cas général d'une trajectoire elliptique :

Pour tous les satellites, le rapport entre le carré de la période de révolution T et le cube du demi-grand axe r de sa trajectoire est le même : $\dfrac{T^2}{r^3}$ = constante = K.

Dans le cas d'une trajectoire circulaire r correspond au rayon de la trajectoire.
En utilisant les réponses aux questions 1.4 et 1.6, établir l'expression de la constante K en fonction de G et M pour les satellites étudiés. Calculer K dans le système international d'unités.

Voir exercices précédents pour la démonstration : $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM_T} \cdot (R_T + h)^3$ d'où $K = \dfrac{4\pi^2}{GM_T}$

2.3.En déduire, pour METEOSAT 8, la valeur de R+H, puis celle de H.

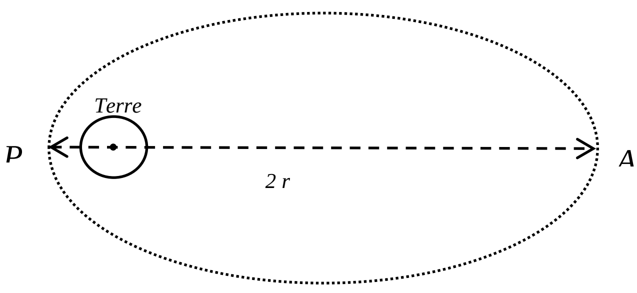
$$(R_T + H)^3 = \frac{GM_T}{4\pi^2} \cdot T_T{}^2$$

A.N. $(R_T + H)^3 = \dfrac{6{,}67.10^{-11} \times 5{,}98.10^{24}}{4\pi^2} \times (8{,}64.10^4)^2 = 7{,}54.10^{22}$

$R_T + H = 4{,}23.10^7\,m$ soit 4,23.10^{4}km

Et donc h_g=4,23.10^4-6,38.10^3=3,60.10^{4}km

2.4.La mise en place du satellite sur l'orbite géostationnaire s'effectue en plusieurs étapes.
Tout d'abord, ARIANE 5 amène le satellite hors de l'atmosphère et le largue sur une orbite de transfert.
L'orbite de transfert parcourue par le satellite est une ellipse (voir figure) dont le périgée **P** se situe à une



altitude voisine de 200 km et l'apogée **A** à l'altitude de
l'orbite géostationnaire voisine de 36000 km.

Ensuite le « moteur d'apogée » du satellite lui permettra d'obtenir la vitesse nécessaire à sa mise sur orbite géostationnaire lors des passages successifs par l'apogée

2.4.1. À l'aide des données ci-dessus, calculer la longueur r du demi-grand axe de la trajectoire sur cette orbite de transfert.

$2r = 200 + 36000 \approx 3{,}60.10^4$km d'où $r = 1{,}8.10^4$km

2.4.2. À l'aide de la troisième loi de Képler, en déduire la période T du satellite sur cette orbite de transfert.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} \cdot r^3 \qquad \text{A.N.} \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{6{,}67.10^{-11} \times 5{,}98.10^{24}} \times \left(1{,}8.10^7\right)^3 = 5{,}77.10^8$$

D'où $T = 2{,}40.10^4$s soit 6,67 heure.