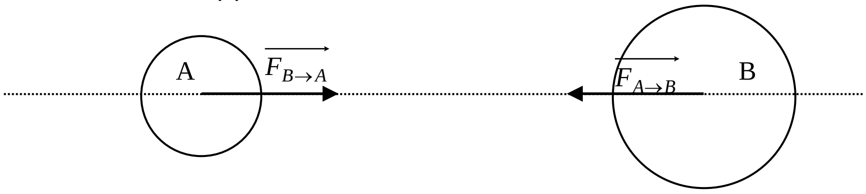
Mouvement des planètes et des satellites

Interaction gravitationnelle : loi de la gravitation

Dans le vide, deux corps A et B, séparées par une distance r = AB et de masses respectives m_A et m_B, sont soumises à deux forces directement opposées, comme le montrent les schémas ci-dessous :

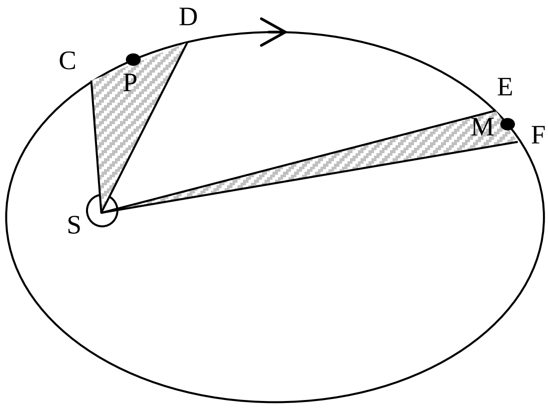


Expression des forces : $F_{A\to B} = F_{A\to B} = G\,\frac{m_A.m_B}{r^2}$ avec $G = 6{,}61\times10^{-11}$ SI.

Mouvement des planètes : Lois de Képler

1ère loi de Képler : **Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil est un foyer.**

2ème loi de Képler : **Le rayon SP (Soleil-Planète) balaie des aires égales pendant des durées égales.**



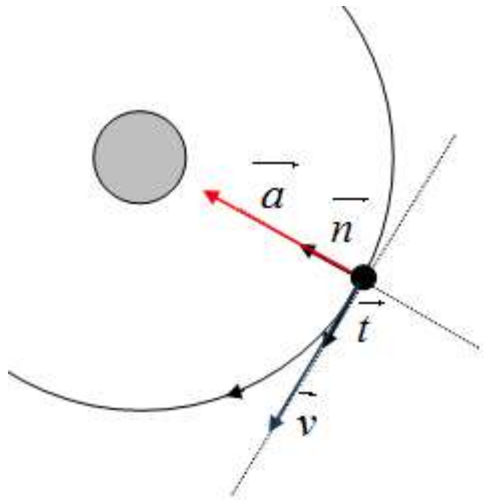
Conséquences : La vitesse d'une planète devient donc plus grande lorsque la planète se rapproche du soleil. Elle est maximale au voisinage du rayon le plus court (périhélie ou périgée), et minimale au voisinage du rayon le plus grand (aphélie ou apogée).

3ème loi de Képler : **Le carré de la période des objets en orbite est proportionnel au cube du demi grand axe de leur trajectoire.**

Remarque : Le demi grand axe d'un cercle correspond au rayon de ce cercle

Vitesse et accélération dans le cas des mouvements circulaires uniformes :

Pour décrire les vecteurs vitesse et accélération dans le cas des mouvements circulaires et uniformes, on utilise le repère de Frénet : il s'agit d'un repère (G, $\vec{t}$, $\vec{n}$) lié au solide en mouvement : son origine coïncide donc avec le centre de gravité G de l'objet en mouvement (à chaque instant), un des axes correspond à la tangente à la trajectoire orienté dans le sens du mouvement, le second correspond à la normale à la trajectoire orienté vers « l'intérieur » de la courbure à la trajectoire



Dans ce repère :

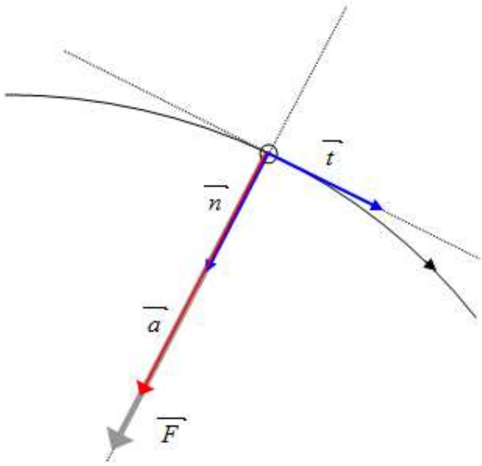
- Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire t dirigé dans le sens du mouvement ; ses coordonnées s'expriment :
  $\vec{v}\begin{vmatrix} v_t = v \\ v_n = 0 \end{vmatrix}$
- Le vecteur accélération est radial (dirigé suivant le rayon) et centripète (vers le centre de la trajectoire) ; ses coordonnées s'expriment :

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l}a_t = \frac{dv}{dt}\\ a_n = \frac{v^2}{r}\end{array}\right.$$

où v est la vitesse de l'objet à la position considérée et r est le rayon de la trajectoire

- <u>Mouvement des satellites en mouvement circulaire</u>

Méthode pour le calcul de la vitesse du satellite :



a. *Faire un bilan des forces sur le satellite en mouvement circulaire*

La seule force s'exerçant sur le satellite est la force d'interaction gravitationnelle $\vec{F}$

Coordonnées de $\vec{F}$ dans le repère mobile de Frénet :

$$\vec{F}\left|\begin{array}{l}0\\ F = G \cdot \frac{m \cdot M_T}{r^2}\end{array}\right.$$

où m est la masse du satellite et M_T la masse de la Terre (plus généralement de l'astre attracteur)

b. *Utiliser la 2ème loi de Newton pour établir les coordonnées du vecteur accélération en fonction de G, M_T et r*

D'après la deuxième loi de Newton $\quad \vec{F} = m \cdot \vec{a}$

D'où $\quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$

D'où les coordonnées de $\vec{a}$ dans le repère de Frénet :

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l}a_t = 0\\ a_n = G \cdot \frac{M_T}{r^2}\end{array}\right.$$

c. *Utiliser l'expression de l'accélération dans le repère de Frénet pour*
   - *montrer que la valeur v de la vitesse d'un satellite en mouvement circulaire est constante (mouvement uniforme).*
   - *exprimer cette vitesse v en fonction de r, G, M_T, puis en fonction de v, R_T et h, l'altitude de ce satellite.*

Les coordonnées générales de l'accélération dans le repère de Frénet sont : $\vec{a}\left|\begin{array}{l}a_t = \frac{dv}{dt}\\ a_n = \frac{v^2}{r}\end{array}\right.$

On a donc :

suivant $\vec{t}$: $\quad \frac{dv}{dt} = 0$ ce qui implique que la valeur de la vitesse est bien constante.

suivant $\vec{n}$: $\quad \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_T}{r^2}$ soit $v = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{r}}$

En remplaçant r par R_T+h, on arrive à $\quad v = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{R_T + h}}$

Remarque importante : On constate que la vitesse du satellite sur son orbite ne dépend pas de sa masse ! D'où les phénomènes d'impesanteur… (l'astronaute dans la station en orbite autour de la Terre est satellisé de la même façon que la station ; les deux satellites tournent indépendamment l'un de l'autre à la même vitesse).

- Période d'un satellite et démonstration de la 3ème loi de Képler

a. Exprimer la période T du satellite en fonction de G, M_T, r.

Rappel : la période du satellite est la durée d'un tour

$$T = \frac{périmètre de la trajectoire}{vitesse} = \frac{2\pi r}{v}$$

$$T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_T}{r}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_T}} \cdot \sqrt{r^3}$$

b. *Vérifier la troisième loi de Kepler : le carré de la période des objets en orbite est proportionnel au cube du demi grand axe de leur trajectoire.*

D'après l'expression établie précédemment :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} \cdot r^3$$

Ceci traduit bien la troisième loi de Képler car $\frac{4\pi^2}{GM_T}$est une constante pour un astre attracteur donné.

- Cas des satellites géostationnaires

Un satellite géostationnaire est toujours à la verticale d'un même point de la surface de la Terre.

Conséquences :
La trajectoire du satellite doit être inscrite dans le plan équatoriale de la Terre.
Le satellite doit avoir la même période de rotation que la Terre ; tous les satellites géostationnaires ont donc la même vitesse et sont donc sur la même orbite !

On peut donc en déduire l'altitude des satellites géostationnaires :

$$T_T{}^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} \cdot \left(R_T + h_g\right)^3$$

D'où $\left(R_T + h_g\right)^3 = \frac{GM_T}{4\pi^2} \cdot T_T{}^2$

A.N. $\left(R_T + h_g\right)^3 = \frac{6{,}67.10^{-11} \times 5{,}98.10^{24}}{4\pi^2} \times (8{,}64.10^4)^2 = 7{,}54.10^{22}$

$R_T + h_g = 4{,}23.10^7 m$ soit $4{,}23.10^4$km

Et donc $h_g = 4{,}23 \times 10^4 - 6{,}28 \times 10^3 = 3{,}60 \times 10^4$km
Les satellites géostationnaires gravitent tous à une altitude de 36000km de la Terre.