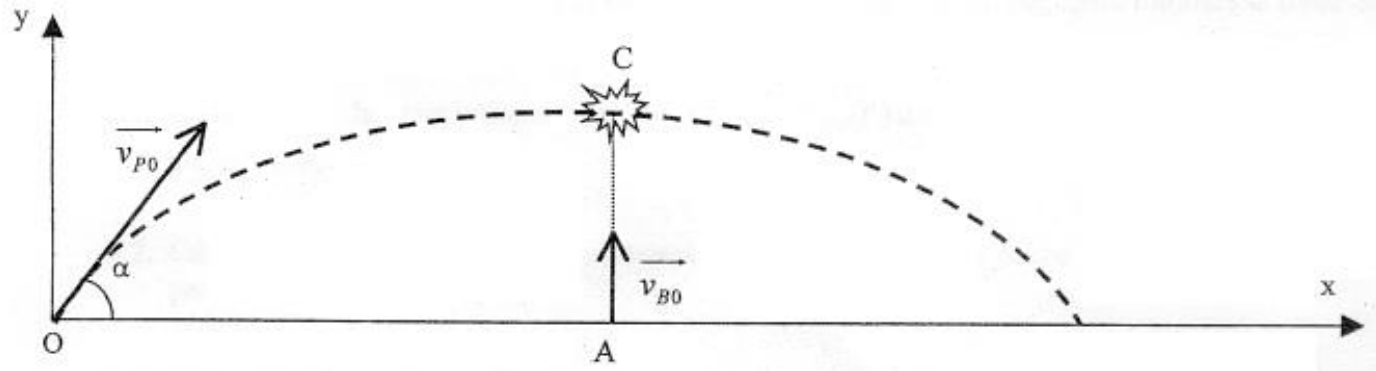
I. TIR AU PIGEON D'ARGILE

On étudie le mouvement d'un pigeon d'argile lancé pour servir de cible à un tireur de ball-trap.
Le pigeon d'argile de masse m_P = 0,10 kg assimilé à un point matériel M est lancé avec un vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{PO}}$ de valeur $\left\|\overrightarrow{V_{PO}}\right\|$ = 30 m.s^{-1} faisant un angle α de 45° par rapport à l'horizontale. Le participant situé en A tire verticalement une balle de masse m_B = 0,020 kg avec un fusil. La vitesse initiale de la balle est $\left\|\overrightarrow{V_{BO}}\right\|$ =500m.s^{-1}, la balle, assimilée à un point matériel B, part du point A tel que OA = 45 m (Les vecteurs vitesse ne sont pas à l'échelle sur le schéma).

On donne g = 10 m.s^{-2}.



Attention : les temps correspondants à chaque mouvement sont notés différemment : *t* pour le pigeon d'argile et *t'* pour la balle de fusil.

1. Étude du mouvement du pigeon d'argile

On notera *t* le temps associé au mouvement du pigeon d'argile. A l'origine du mouvement *t* = 0.

1.1.On négligera les frottements sur le pigeon d'argile. Etablir l'expression $\overrightarrow{a_P}$ de son accélération à partir du bilan des forces.

Seule force non négligeable s'exerçant sur le pigeon : son poids

D'après la 2ème loi de Newton : $\vec{P} = m \cdot \overrightarrow{a_p}$ d'où $\overrightarrow{a_p} = \dfrac{\vec{P}}{m}$

1.2.Donner les composantes de l'accélération $\overrightarrow{a_P}$ dans le repère (O, x, y).

coordonnées du poids dans le repère imposé sont : $\vec{P}\begin{vmatrix} 0 \\ -mg \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} sur\ Ox : & a_x = 0 \\ sur\ Oy : & a_y = \dfrac{-mg}{m} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

D'où les coordonnées du vecteur accélération : $\overrightarrow{a_p}\begin{vmatrix} 0 \\ -g \end{vmatrix}$

1.3.Établir les composantes $v_{Px}(t)$ et $v_{Py}(t)$ du vecteur vitesse $\vec{v}_P$ dans le repère (O, x, y) en fonction du temps *t*

$\overrightarrow{a_p} = \dfrac{d\overrightarrow{v_p}}{dt}$; on obtient donc les coordonnées de la vitesse en cherchant une primitive de $\overrightarrow{a_p}$ sur chaque axe :

$\overrightarrow{v_p}\begin{vmatrix} 0 \cdot t + A = A \\ -g \cdot t + B \end{vmatrix}$ où A et B sont des constantes qu'on peut définir en considérant les conditions initiales du mouvement :

à t=0 $\quad \overrightarrow{v_{p0}} \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$ or $\overrightarrow{v_{p0}} \begin{vmatrix} V_{p0x} = V_{p0}\cos\alpha \\ V_{p0y} = V_{p0}\sin\alpha \end{vmatrix}$ d'où $\begin{vmatrix} A = V_{p0}\cos\alpha \\ B = V_{p0}\sin\alpha \end{vmatrix}$

soit $\quad \overrightarrow{v_p} \begin{vmatrix} V_{p0}\cos\alpha \\ -g\cdot t + V_{p0}\sin\alpha \end{vmatrix}$

1.4.Établir les composantes $x_P(t)$ et $y_P(t)$ du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans le repère (O, x, y) en fonction du temps *t*.

$\overrightarrow{v_p} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$; on obtient donc les coordonnées du vecteur position en cherchant une primitive de $\vec{v}$ sur chaque axe :

$\overrightarrow{OM_p} \begin{vmatrix} V_{p0}\cos\alpha\cdot t + A' \\ -\dfrac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 + V_{p0}\sin\alpha\cdot t + B' \end{vmatrix}$ où A' et B' sont des constantes qu'on peut définir en considérant les conditions initiales du mouvement :

à t=0 $\quad \overrightarrow{OM_0} \begin{vmatrix} A' \\ B' \end{vmatrix}$ or $\overrightarrow{OM_0} \begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{vmatrix}$ d'où $\begin{vmatrix} A' = 0 \\ B' = 0 \end{vmatrix}$

soit $\quad \overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} x_p(t) = V_{p0}\cos\alpha\cdot t \\ y_p(t) = -\dfrac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 + V_{p0}\sin\alpha\cdot t \end{vmatrix}$

2. **Tir réussi**

2.1.Quelle est l'abscisse x_C du point d'impact C du pigeon d'argile et de la balle ?

$x_C = x_A = OA = 45m$

2.2.Vérifier, à partir de l'abscisse x_C de l'impact, que le temps de « vol » du pigeon est Δt = 2,1 s.

A partir de la composante suivant x du vecteur $\overrightarrow{OM}$, on peut établir l'équation : $\quad x_p(t_C) = V_{p0}\cos\alpha\cdot t_C$

avec $t_C = \Delta t$ $\quad$ et $\quad x_p(t_C) = x_C$

D'où $\quad \Delta t = \dfrac{x_C}{V_{p0}\cos\alpha}$ $\quad$ A.N. $\quad \Delta t = 2{,}1s$

2.3.On néglige toutes les forces s'exerçant sur la balle.

2.3.1. Que peut-on dire de son accélération a_B ? Que peut-on dire de sa vitesse v_B ? Déterminer alors la vitesse v_B.

Selon le principe d'inertie, comme aucune force n'agit sur la balle au cours de son mouvement, le mouvement de la balle est rectiligne et uniforme. $a_B=0$ et $v_B=cste=500 m.s^{-1}$

2.3.2. Calculer $\Delta t'$ le temps de « vol » de la balle jusqu'à l'impact connaissant l'ordonnée du point de l'impact y_C = 22 m.

$\Delta t' = \dfrac{y_C}{v_B}$ $\quad$ A.N. $\quad \Delta t' = 4{,}4.10^{-2} s$ soit 44ms

2.4.Comparer Δt et $\Delta t'$ et expliquer pourquoi le tireur peut viser directement le pigeon.

$\dfrac{\Delta t}{\Delta t'} = \dfrac{2{,}1}{0{,}044} \approx 48$ La durée mise par la balle est environ 50× plus courte que le temps de vol du pigeon, on peut quasiment la négliger.

3. **Discussion de l'effet du poids de la balle**

Dans cette partie l'effet du poids de la balle n'est plus négligé mais on négligera toujours la force de frottement de l'air.

3.1.Établir que la composante de la vitesse $v_{By}(t')$ dans le repère (O,x,y) vérifie l'équation $v_{By}(t') = v_{B0} - g\,t'$.

Bilan des forces : Poids de la balle

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} = m \cdot \vec{a}$

Avec $\vec{P}\begin{vmatrix} 0 \\ -mg \end{vmatrix}$

projetons la 2ème loi sur les axes du repère :

$$\begin{cases} sur\ Ox : & 0 = m \cdot a_x \\ sur\ Oy : & -mg = m \cdot a_y \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

D'où les coordonnées du vecteur accélération : $\vec{a}\begin{vmatrix} 0 \\ -g \end{vmatrix}$

Par intégration :

$\vec{v_B}\begin{vmatrix} 0 \cdot t + A = A \\ -g \cdot t' + B \end{vmatrix}$ où A et B sont des constantes qu'on peut définir en considérant les conditions initiales du mouvement :

à t'=0 $\quad \vec{v_{B0}}\begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$ or $\vec{v_{B0}}\begin{vmatrix} V_{B0x} = 0 \\ V_{B0y} = V_{B0} \end{vmatrix}$ d'où $\begin{vmatrix} A = 0 \\ B = V_{B0} \end{vmatrix}$

soit $\quad \vec{v_B}\begin{vmatrix} v_{Bx}(t) = 0 \\ v_{By}(t) = -g \cdot t' + V_{B0} \end{vmatrix}$

Remarque : on utilise ici t' pour la variable temps et non t car l'origine du mouvement de la balle et du pigeon ne sont pas les mêmes (=2chronos différents, déclenchés à 2 instants différents)

3.2.Calculer la vitesse v_{By} au bout d'un temps $\Delta t' = 0{,}044$ s, justifier pourquoi on a négligé le poids dans la partie 2.

$\overrightarrow{v_B(0{,}044)}\begin{vmatrix} 0 \\ v_{By}(0{,}044) = 499{,}6\, m.s^{-1} \end{vmatrix}$ soit v_{By}=500m.s-1 en considérant la précision de l'exercice.

La prise en compte du poids n'intervient pas au niveau de la valeur de la vitesse de la balle.

II. LE LANCER DU POIDS AUX CHAMPIONNATS DU MONDE 2003

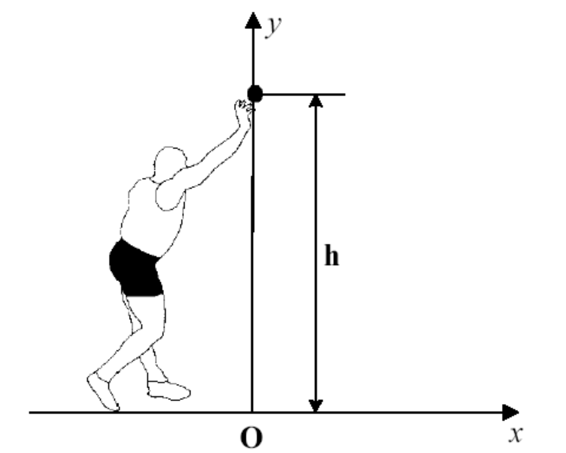
Lors des derniers championnats du monde d'athlétisme qui eurent lieu à Paris en août 2003, le vainqueur de l'épreuve du lancer du poids (Andrey Mikhnevich) a réussi un jet à une distance D = 21,69 m.
Pour simplifier les raisonnements, on ne travaillera que sur le centre d'inertie du boulet (nom courant donné au poids).

L'entraîneur de l'un de ses concurrents souhaite étudier ce lancer. Pour cela il dispose pour le centre d'inertie du boulet, en plus de la valeur 21,69m du record, de la vitesse initiale v_0 mesurée à l'aide d'un cinémomètre et de l'altitude h.

Données: $v_0 = 13{,}7\ m.s^{-1}$
$h = 2{,}62\ m$

Un logiciel informatique lui permet de réaliser une simulation de ce lancer et de déterminer la valeur de l'angle du vecteur vitesse initiale avec l'horizontale soit $\alpha = 43°$.

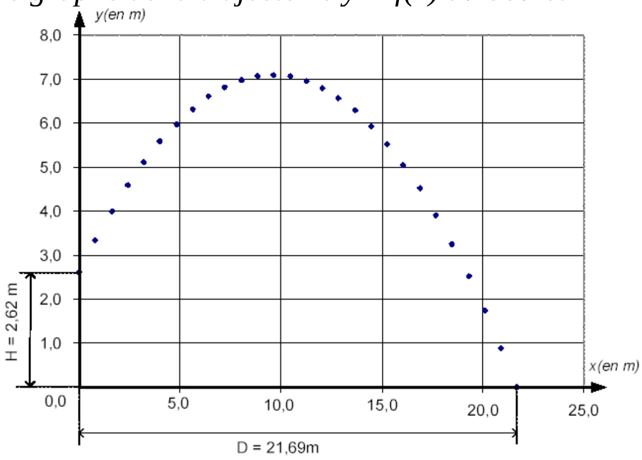
Pour l'étude on définit le repère d'espace (O,x,y) représenté ci-contre:



- *Oy est un axe vertical ascendant passant par le centre d'inertie du boulet à l'instant où il quitte la main du lanceur.*
- *Ox est un axe horizontal au niveau du sol, dirigé vers la droite et dans le plan vertical de la trajectoire.*

L'entraîneur a étudié le mouvement du centre d'inertie du boulet et a obtenu 3 graphes:

- *le graphe de la trajectoire y = f(x) du boulet*



- les graphes de v_x et de v_y en fonction du temps (figures 1 et 2 données ci-dessous) où v_x et v_y sont les composantes (ou coordonnées) horizontales et verticale du vecteur vitesse.

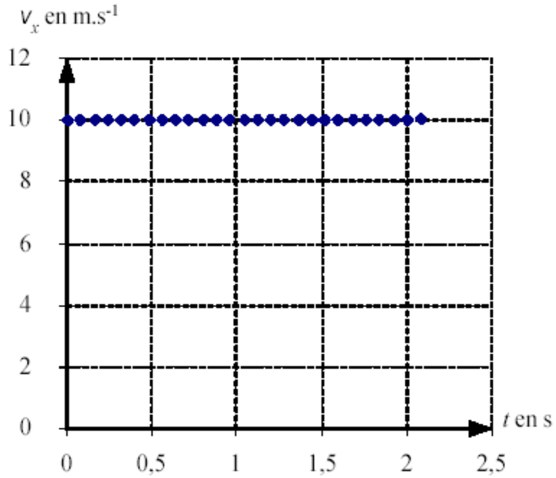


Figure 1

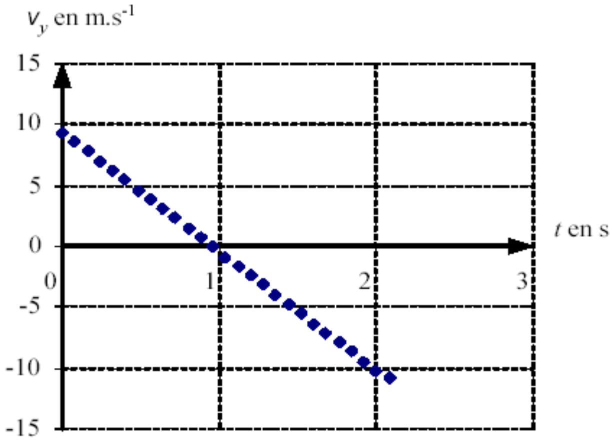


Figure 2

Pour chacun des graphes, les dates correspondant à deux points successifs sont séparées par le même intervalle de temps.

1. Étude des résultats de la simulation.

1.1. Étude de la projection horizontale du mouvement du centre d'inertie du boulet.

En utilisant la figure 1, déterminer:

1.1.1. La composante v_{0x} du vecteur vitesse du centre d'inertie du boulet à l'instant de date t = 0 s.

V_{0x}=10m.s^{-1}

1.1.2. La nature du mouvement de la projection du centre d'inertie sur l'axe Ox en justifiant la réponse.

Mouvement uniforme sur Ox.

1.1.3. La composante v_{Sx} du vecteur vitesse du centre d'inertie lorsque le boulet est au sommet S de sa trajectoire.

V_{Sx}=V_{0x}=10m.s^{-1}

1.2. Étude des conditions initiales du lancer.

1.2.1. En utilisant la figure 2, déterminer la composante v_{0y} du vecteur vitesse à l'instant de date t = 0 s.

V_{0y}=9 m.s^{-1}

1.2.2. À partir des résultats précédents, vérifier que la valeur de la vitesse instantanée et l'angle de tir sont compatibles avec les valeurs respectives v_0 = 13,7 m.s^{-1} et α = 43° données dans le texte.

$V_{0x} = V_0 \cos\alpha$ A.N. V_{0x}=10,0m.s^{-1}

$V_{0y} = V_0 \sin\alpha$ A.N. V_{0y}=9,3m.s^{-1}

Ces résultats coïncident avec les valeurs lues, compte tenu de la précision de lecture des graphiques.

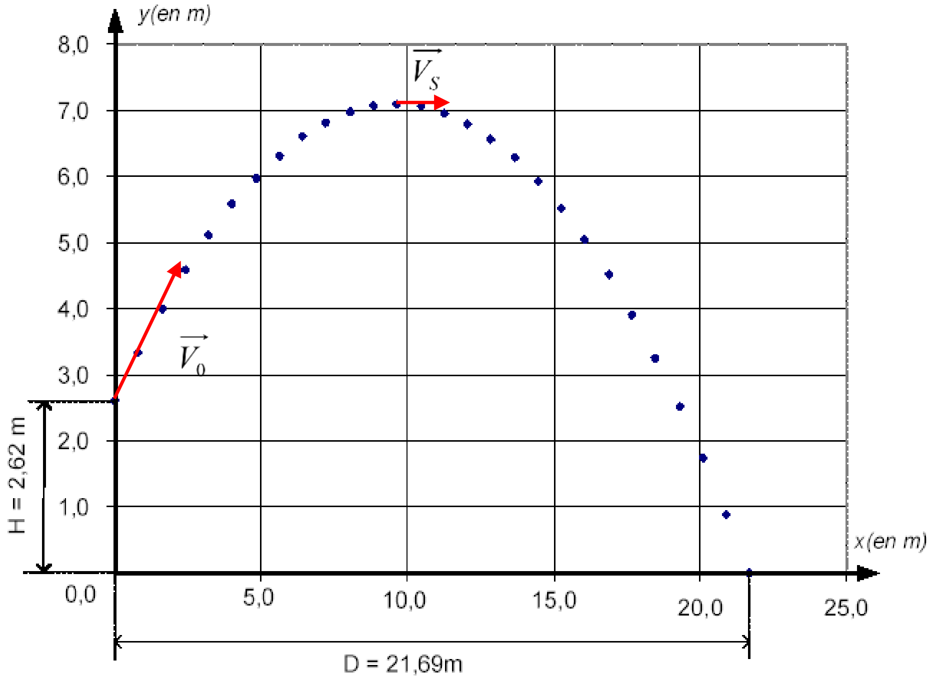
1.3. Étude du vecteur vitesse du centre d'inertie du boulet.

1.3.1. Déterminer toutes les caractéristiques du vecteur vitesse du centre d'inertie du boulet au sommet de la trajectoire.

$$\overrightarrow{V_0}\left| \begin{array}{l} V_{Sx} = V_{0x} = 10{,}0 \\ V_{Sy} = 0 \end{array} \right.$$

1.3.2. Sur le graphe $y = f(x)$ donné précédemment**,** tracer en cohérence avec les résultats des questions 1.1.1., 1.1.3., et 1.2.1. :

- le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ du centre d'inertie du boulet à l'instant du lancer ;
- le vecteur vitesse $\vec{v}_S$ du centre d'inertie du boulet au sommet de la trajectoire.



2. Étude théorique du mouvement du centre d'inertie.

2.1. Par application de la 2ème loi de Newton (ou théorème du centre d'inertie), dans le référentiel terrestre supposé galiléen, déterminer le vecteur accélération du centre d'inertie du boulet lors du mouvement (on supposera que, compte tenu des faibles vitesses atteintes, les frottements dus à l'air au cours du jet sont négligeables).

Seule force non négligeable s'exerçant sur le boulet : son poids

dont les coordonnées dans le repère imposé sont : $\vec{P}\left| \begin{array}{l} 0 \\ -mg \end{array} \right.$

D'après la 2ème loi de Newton : $\vec{P} = m \cdot \vec{a}$ projetée sur les deux axes :

$$\begin{cases} sur\ Ox : & 0 = m \cdot a_x \\ sur\ Oy : & -mg = m \cdot a_y \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

D'où les coordonnées du vecteur accélération : $\vec{a}\left| \begin{array}{l} 0 \\ -g \end{array} \right.$

2.2. Dans le repère d'espace défini en introduction, montrer que les équations horaires du mouvement s'expriment sous la forme: $x(t) = (v_0.\cos\alpha).t$ et $y(t) = -\frac{1}{2}.g.t^2 + (v_0.\sin\alpha).t + h$

où v_0 est la vitesse initiale du jet et α l'angle initial de tir (angle entre l'horizontale et le vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$).

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$; on obtient donc les coordonnées de la vitesse en cherchant une primitive de $\vec{a}$ sur chaque axe :

$$\vec{v}\left|\begin{array}{l} 0\cdot t + A = A \\ -g\cdot t + B \end{array}\right.$$ où A et B sont des constantes qu'on peut définir en considérant les conditions initiales du mouvement :

à t=0 $\quad \overrightarrow{v_0}\left|\begin{array}{l} A \\ B \end{array}\right.$ or $\overrightarrow{v_0}\left|\begin{array}{l} V_{0x} = V_0 \cos\alpha \\ V_{0y} = V_0 \sin\alpha \end{array}\right.$ d'où $\left|\begin{array}{l} A = V_0 \cos\alpha \\ B = V_0 \sin\alpha \end{array}\right.$

soit $\quad \vec{v}\left|\begin{array}{l} V_0 \cos\alpha \\ -g\cdot t + V_0 \sin\alpha \end{array}\right.$

$\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$; on obtient donc les coordonnées du vecteur position en cherchant une primitive de $\vec{v}$ sur chaque axe :

$$\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l} V_0 \cos\alpha \cdot t + A' \\ -\dfrac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 + V_0 \sin\alpha \cdot t + B' \end{array}\right.$$ où A' et B' sont des constantes qu'on peut définir en considérant les conditions initiales du mouvement :

à t=0 $\quad \overrightarrow{OM_0}\left|\begin{array}{l} A' \\ B' \end{array}\right.$ or $\overrightarrow{OM_0}\left|\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = h \end{array}\right.$ d'où $\left|\begin{array}{l} A' = 0 \\ B' = h \end{array}\right.$

soit $\quad \overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l} x(t) = V_0 \cos\alpha \cdot t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 + V_0 \sin\alpha \cdot t + h \end{array}\right.$

Ce qui est en accord avec l'expression proposée.

En déduire l'équation de la trajectoire du centre d'inertie.

L'équation de la trajectoire est l'expression mathématique de y en fonction de x. Il s'agit donc d'éliminer t : on exprimer x en fonction de t et on remplace dans l'expression de y(t) :

$t = \dfrac{x}{V_0 \cdot \cos\alpha}$ d'après l'équation horaire sur Ox

d'où $\quad y = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{g}{\cos^2\alpha}\cdot x^2 + \tan\alpha \cdot x + h$