Equations horaires d'un mouvement parabolique

A. Premier service :

1. **Composantes du vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$**

$$\overrightarrow{v_0}\left|\begin{array}{l}V_{0x} = V_0 \cos\alpha \\ V_{0z} = V_0 \sin\alpha\end{array}\right.$$

2. **Bilan des forces :**

Système étudié : {balle}
Bilan des forces sur la balle : poids
dont les coordonnées dans le repère imposé sont : $\vec{P}\left|\begin{array}{l}0 \\ -mg\end{array}\right.$

3. **Expression du vecteur accélération $\vec{a}$ à partir du bilan des forces :**

D'après la 2ème loi de Newton : $\vec{P} = m \cdot \vec{a}$
D'où $\vec{a} = \frac{\vec{P}}{m}$
D'où les coordonnées du vecteur accélération : $\vec{a}\left|\begin{array}{l}0 \\ -g\end{array}\right.$

4. **Composantes $V_x(t)$ et $V_z(t)$ du vecteur vitesse $\vec{V}$:**

Par intégration du vecteur accélération : (Rappel : définition de l'accélération $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$)

$$\vec{v}\left|\begin{array}{l}V_x(t) = 0 \cdot t + A = A \\ V_z(t) = -g \cdot t + B\end{array}\right.$$

où A et B sont des constantes qu'on peut définir en considérant les conditions initiales du mouvement :

à t=0 $\overrightarrow{v_0}\left|\begin{array}{l}A \\ B\end{array}\right.$ or $\overrightarrow{v_0}\left|\begin{array}{l}V_{0x} = V_0 \cos\alpha \\ V_{0z} = V_0 \sin\alpha\end{array}\right.$ d'où $\left|\begin{array}{l}A = V_0 \cos\alpha \\ B = V_0 \sin\alpha\end{array}\right.$

soit $\vec{v}\left|\begin{array}{l}V_x(t) = V_0 \cos\alpha \\ V_z(t) = -g \cdot t + V_0 \sin\alpha\end{array}\right.$

5. **Composantes $x_M(t)$ et $z_M(t)$ du vecteur position $\overrightarrow{OM}$:**

Par intégration du vecteur vitesse : (Rappel : définition de la vitesse : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$)

$$\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l}x(t) = V_0 \cos\alpha \cdot t + A' \\ z(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + V_0 \sin\alpha \cdot t + B'\end{array}\right.$$

où A' et B' sont des constantes qu'on peut définir en considérant les conditions initiales du mouvement :

à t=0 $\overrightarrow{OM_0}\left|\begin{array}{l}A' \\ B'\end{array}\right.$ or $\overrightarrow{OM_0}\left|\begin{array}{l}x_0 \\ z_0\end{array}\right.$ d'où $\left|\begin{array}{l}A' = x_0 \\ B' = z_0\end{array}\right.$

soit $\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l}x(t) = V_0 \cos\alpha \cdot t + x_0 \\ z(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + V_0 \sin\alpha \cdot t + z_0\end{array}\right.$

6. Sommet de la trajectoire :

   Droite bleue correspond à V_x (mouvement horizontal uniforme)
   Droite orange correspond à V_z , vitesse verticale.

   Au moment où la balle arrive au sommet de la trajectoire, la vitesse verticale de la balle est nulle.
   $v_z(t_S) = 0$ $\quad -g \cdot t_S + V_0 \sin \alpha = 0$ $\quad$ d'où $\quad t_S = \frac{V_0 . sin\alpha}{g}$ $\quad$ A.N. $\quad t_S = 0{,}56\ s$

   Calculons l'altitude de la balle à cette date : $\quad z(t_S) = 2{,}74\ m$

7. Détermination de la date t_{Filet} :

   Le filet se situe au milieu du terrain, soit à $x_{Filet} = \frac{18}{2} = 9{,}0\ m$ de l'origine.

   On cherche t_{Filet} tel que $x(t_{Filet}) = x_{Filet} = 9{,}0$.

   Pour cela, on pose : $\quad x(t_{Filet}) = x_{Filet} = V_0 \cos \alpha \cdot t_{Filet} + x_0$

   Soit $\quad t_{Filet} = \frac{x_{Filet} - x_0}{V_0 cos\alpha}$

   A.N. $\quad t_{Filet} = \frac{9{,}0 - 0.50}{12 \times \cos(30)} = 0{,}82\ s$

   Pour vérifier que la balle passe au-dessus du filet, on calcule $z(t_{Filet})$:
   $z(t_{Filet}) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{Filet}^2 + V_0 \sin \alpha \cdot t_{Filet} + z_0$ $\quad$ A.N. $\quad z(t_{Filet}) = 2{,}8\ m$

   Or $z(t_{Filet}) > 2{,}43\ m$ la balle passe au-dessus du filet.

B. Second service :

1. **Nouvelles équations horaires :**
   On pose $\alpha = 0$ d'où $cos\alpha = 1$ et $\sin \alpha = 0$, et $x_0 = 0$ et $z_0 = h$

   $$\vec{v} \left| \begin{array}{l} V_x(t) = V_0 \\ V_z(t) = -g \cdot t \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x(t) = V_0 \cdot t \\ z(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + h \end{array} \right.$$

2. **Vérification point marqué :**

   Pour que le point soit marqué, il faut que la balle touche le sol avant le fond du terrain.

   Soit t_{Sol} la date à laquelle la balle touche le sol : elle est définie par $z(t_{Sol}) = 0$
   $$z(t_{Sol}) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{Sol}^2 + h = 0 \qquad \text{soit} \qquad t_{Sol}^2 = \frac{2h}{g}$$
   Deux solutions sont possibles pour t_{Sol} :
   Seule la solution positive convient, soit $t_{Sol} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ $\quad$ A.N. $\quad t_{Sol} = 0{,}85\ s$

   Calculons $x(t_{Sol})$: $x(t_{Sol}) = 21 \times 0{,}85 =$17,9 m
   Cette valeur est inférieure à 18 m, l'abscisse de la ligne de fond averse. Le point est marqué.

3. Interception par un joueur adverse :

Déterminons la date t_R à laquelle la balle est à 80 cm du sol : $z(t_R) = 0,80$

$z(t_R) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_R^2 + h = 0,80$ d'où $t_R = \sqrt{\frac{2(h-0,80)}{g}}$ A.N. $t_R = 0,74\ s$

Calculons l'abscisse de la balle à cette date :

$x(t_R) = V_0 \,.\, t_R$ A.N. $x(t_R) = 21 \times 0,74 = 15,6\ m$

Calculons la distance que doit parcourir le joueur adverse : $d = 18 - 15,6 = 2,4m$

Calculons la vitesse du joueur adverse : $v = \frac{d}{t_R}$

A.N. $v = \frac{2,4}{0,74} = 3,2\ m.s^{-1} = 11,7\ km.h^{-1}$

La vitesse est possible.

4. **Equations si M_0 coïncide avec O ?**

$$\vec{v}\left|\begin{array}{l} V_x(t) = V_0 \cos\alpha \\ V_z(t) = -g\cdot t + V_0 \sin\alpha \end{array}\right. \qquad \overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l} x(t) = V_0 \cos\alpha \cdot t \\ z(t) = -\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 + V_0 \sin\alpha \cdot t \end{array}\right.$$

5. Dans ces conditions, établir l'équation de la trajectoire $z_M=f(x_M)$ suivie par le projectile. De quelle fonction mathématique s'agit-il ?

   d'après l'équation horaire sur Ox $t = \frac{x}{V_0 \cdot \cos\alpha}$ d'où $z = -\frac{1}{2v_0^2}\cdot\frac{g}{\cos^2\alpha}\cdot x^2 + \tan\alpha\cdot x$

   Il s'agit de l'équation d'une parabole.

Dans la suite de l'étude, on se placera dans le cas étudié où M_0 coïncide avec O.

I. Portée du Tir :

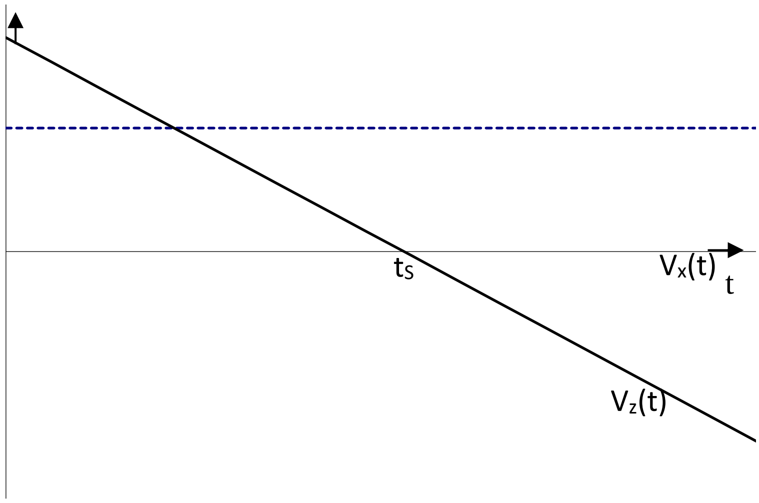
La portée correspond à la distance maximale atteinte par le projectile lorsque celui-ci touche le sol. Ce point est noté P sur le schéma.

1. Quelle coordonnée du point P peut-on connaître ?
   $z_P = 0$

2. En déduire une équation qui permet de déterminer t_P, la date à laquelle le projectile atteint ce point. Résoudre cette équation et discuter des solutions.
$$-\frac{1}{2} \cdot g \cdot {t_p}^2 + V_0 \sin\alpha \cdot t_p = 0$$
   On met t_p en facteur :
$$t_p \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_p \quad + V_0 \sin\alpha\right) = 0$$
   Cette équation est vérifiée si
   soit $t_p = 0$ ce qui correspond au début du mouvement (condition initiale)
   soit $-\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_p \quad + V_0 \sin\alpha = 0$ soit $t_p = \frac{2V_0 \sin\alpha}{g}$
3. Calculer la portée du tir.
   il faut calculer $x(t_p)$: $x(t_p) = V_0 \cos\alpha \cdot t_p = \frac{{V_0}^2 \cos\alpha \cdot \sin\alpha}{g}$

II. Sommet de la trajectoire :

1. Sur le graphique suivant, laquelle des courbes représente $V_x(t)$ et laquelle représente $V_z(t)$?
   Justifier les signes de $V_y(t)$. Quelle date particulière peut-on placer sur ce graphe ?



2. Dessiner le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_S}$ au sommet S de la trajectoire ?
   Donner les coordonnées de ce vecteur.
$$\overrightarrow{V_S} \begin{vmatrix} V_{Sx} = V_{0x} = V_0 \cos\alpha \\ V_{Sz} = 0 \end{vmatrix}$$

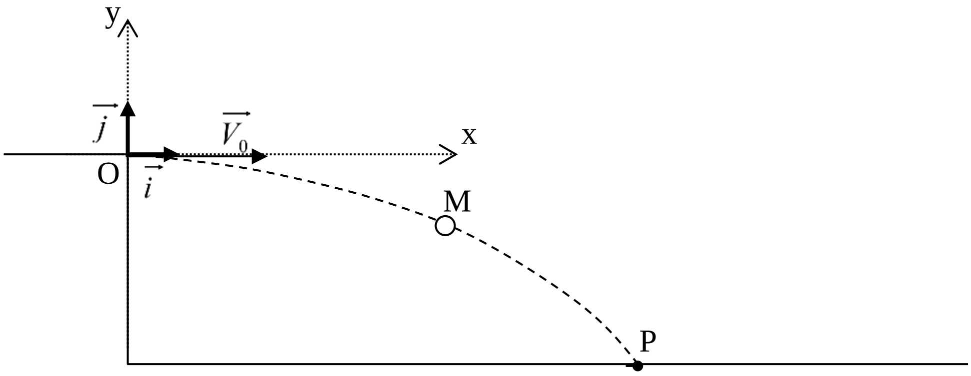
3. Calculer la date t_S à laquelle le projectile atteint le sommet ?
   $v_z(t_S) = V_{Sz}$ donc $-g \cdot t_S + V_0 \sin\alpha = V_0 \cdot \cos\alpha$ soit $t_S = \frac{V_0 \cdot (\sin\alpha - \cos\alpha)}{g}$

III. Etudes de quelques cas particuliers :

1. Exprimer les équations horaires de la vitesse et de la position si α = 90°.
   A quoi correspond ce cas particulier ?

$\vec{v}\begin{vmatrix} V_0 \, cos \, 9\,0 \\ -g \cdot t + V_0 \, sin \, 9\,0 \end{vmatrix}$ $\vec{v}\begin{vmatrix} v_x(t) = 0 \\ v_z(t) = -g \cdot t \end{vmatrix}$

2. Etablir les équations horaires dans le cas suivant ; on considèrera que le projectile est en O à t=0 et que la vitesse initiale $\vec{V_0}$ est horizontal.



$\vec{v}\begin{vmatrix} v_x(t) = V_0 \, cos \, \alpha \\ v_z(t) = 0 \end{vmatrix}$ $\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x(t) = V_0 \, cos \, \alpha \cdot t \\ z(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{vmatrix}$

3. L'ordonnée du point P est -h. Exprimer les conditions mathématiques qui permettent de calculer x_P l'abscisse du point P.

$z(t_p) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot {t_p}^2$ donc $-h = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot {t_p}^2$ soit $t_p = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Et donc $x_p = x(t_p) = V_0 \, cos \, \alpha \cdot t_p$