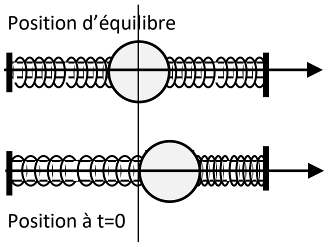
Oscillations mécaniques élastiques

I. Introduction :

La détermination de la masse d'un corps sur Terre repose sur la mesure de son poids. En effet, le principe des balances que nous utilisons repose sur la capacité de la Terre à nous attirer. La mesure du poids (Newton) qui en résulte est convertie en masse (kg).
Comment un astronaute détermine-t-il sa masse dans l'espace ?
https://www.youtube.com/watch?v=oU3pp_4n84U

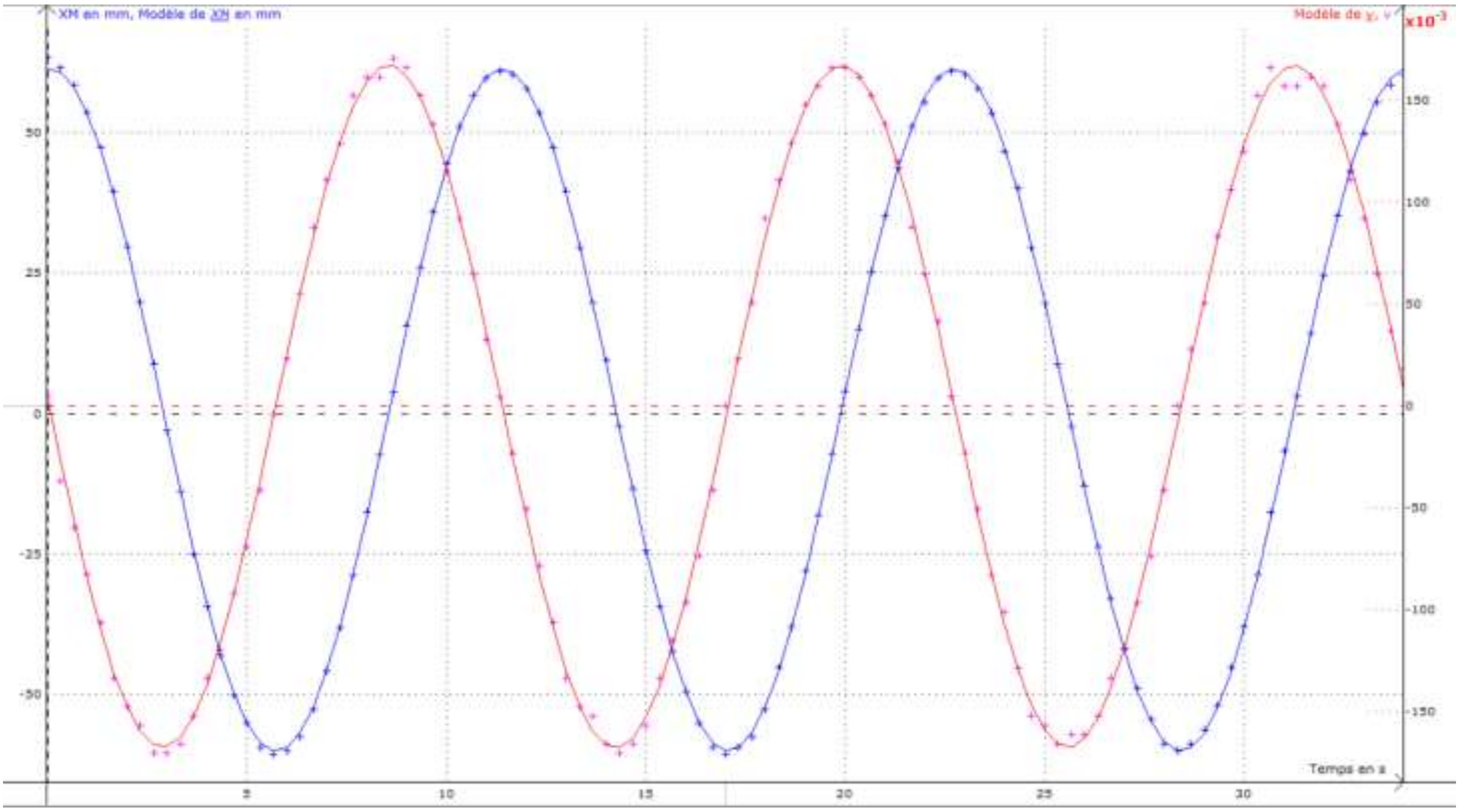
Expérience :
On filme le mouvement horizontal d'un palet sur coussin accroché à des ressorts. Le palet, initialement à l'équilibre est écarté de sa position d'équilibre, puis lâché sans vitesse initiale.



- Décrire le mouvement du palet.

- Quel est l'intérêt d'utiliser la table à coussin d'air ?

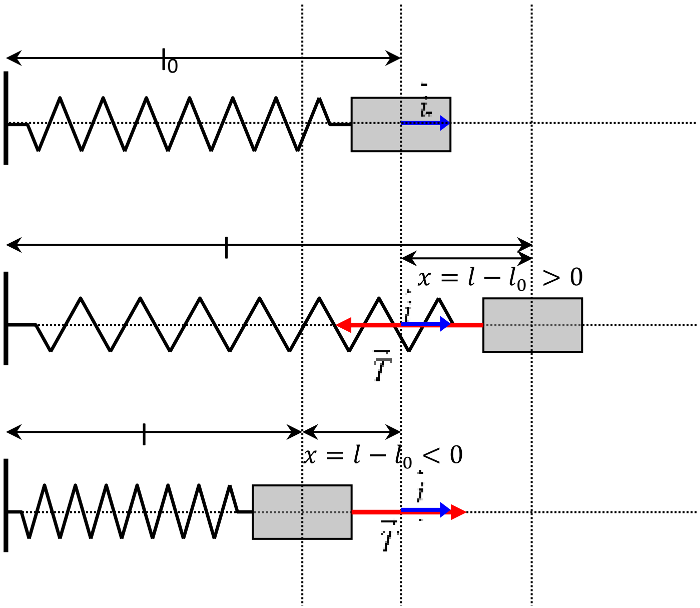
Avec le logiciel Latispro, on pointe les positions du palet sur chaque image (Origine du repère à la position d'équilibre). A l'aide des fonctionnalités du logiciel (calculs de dérivées) on calcule également la vitesse du palet. On a tracé $x(t)$ et $v(t)$ et on a modélisé les courbes obtenus :



- Par quelles fonctions a-t-on modélisé les courbes obtenues ?

On cherche à montrer que les lois de la mécanique permettent de confirmer ces observations.
On cherche également à déterminer l'expression de la période des oscillations pour comprendre comment la mesure de cette période permet de mesurer la masse d'un astronaute.

II. Expression vectorielle de la tension du ressort :



Etablir l'expression vectorielle de la tension $\vec{T}$ du ressort en utilisant le vecteur unitaire $\vec{i}$, sachant l'intensité de la tension s'exprime de façon suivante :

$$T = k \cdot |x|$$

Où k est le coefficient de raideur du ressort
et x l'allongement algébrique du ressort

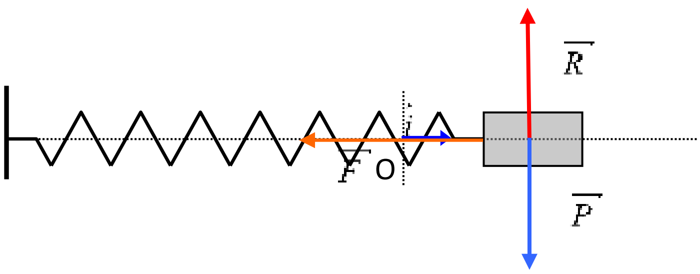
Rq : l'expression doit être valable quelque soit le cas considéré (étirement ou rétrécissement du ressort)
Parmi les expressions proposées, choisir celle qui convient ; justifier

- ☐ $\vec{F} = -k \cdot x \cdot \vec{i}$
- ☐ $\vec{F} = k \cdot x \cdot \vec{i}$

III. Oscillateur mécanique horizontal sans amortissement (régime périodique) :

On modélise la situation expérimentale ; pour des raisons de simplification (qui ne change rien aux calculs), on ne prend en compte qu'un seul ressort dont la raideur k est le double de celle de chacun des ressorts identiques utilisés dans l'expérience : le mobile assimilé à son centre d'inertie G peut osciller horizontalement sans frottement suivant un axe Ox. On étudie son mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le point O coïncide avec la position de G lorsque le ressort est au repos.
On néglige les frottements du mobile sur son rail de guidage.

1. Faire l'inventaire des forces exercées sur le mobile.



$\vec{P}$: poids du mobile
$\vec{R}$: Réaction de la table à coussin d'air
$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ puisqu'il n'y a pas d'accélélration suivant l'axe vertical.

$\vec{F}$: force de rappel exercée par le ressort.

2. En appliquant la seconde loi de Newton au mobile, montrer que la position x du palet vérifie une équation du type :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0$$

Ce type d'équation qui relie une fonction à sa dérivée ou sa dérivée seconde s'appelle « équation différentielle ».
En déduire l'expression de ω_0^2 en fonction des grandeurs caractéristiques de l'oscillateur.

2ème loi de Newton : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$ soit $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

Avec $\vec{F} = -k \cdot x \cdot \vec{i}$ et $\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i}$

On arrive à $-k \cdot x \cdot \vec{i} = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i}$

Soit $-k \cdot x \cdot = \frac{d^2x}{dt^2}$ ou encore $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$

On en déduit que $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

3. Vérifier que $x = X_m \cdot cos(\omega_0 t + \phi)$ est solution de cette équation différentielle quelles que soient les valeurs des constantes X_M et φ.
$\frac{dx}{dt} = -X_m\omega_0 \cdot sin(\omega_0 t + \phi)$
$\frac{d^2x}{dt^2} = -X_m\omega_0^2 \cdot cos(\omega_0 t + \phi)$
Calculons $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x : -X_m\omega_0^2 \cdot cos(\omega_0 t + \phi) + \omega_0^2 \cdot X_m\, cos(\omega_0 t + \phi) = 0$
L'expression proposée est bien solution de l'équation différentielle.

4. Détermination de X_M et φ :
On considère qu'à l'instant t=0, le solide est écarté de sa position d'équilibre à la position $x(0) = A_m$, et lâché sans vitesse initiale.
Déterminer les constantes X_m et φ.

A partir des conditions initiales : $x(0) = X_m \cdot cos(\phi) = A_m$ (1)
et $v(0) = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = -X_m\omega_0 \cdot sin(\phi) = 0$ (2)

En divisant (2) par (1) : $\frac{v(0)}{x(0)} = -\omega_0 . \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{0}{A_m}$ soit $-\omega_0 . \tan\varphi = 0$
comme $\omega_0 = \frac{k}{m} \neq 0$ alors $\varphi = 0$

A partir de (1) : $x(0) = X_m . \cos 0 = A_m$ d'où $X_m = A_m$

On a donc $x(t) = X_m . \cos(\omega_0 . t)$ (avec les conditions initiales de l'expérience étudiée)

5. Donner l'expression de la vitesse du palet. Vérifier qu'elle est bien en accord avec les résultats expérimentaux :

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -X_m . \omega_0 . \sin(\omega_0 . t)$$

Accord avec les résultats expérimentaux : lorsque $x = X_{max}$ $(\omega_0 . t = 0 + 2k\pi)$,
alors $v = 0$ $(\sin(0 + 2k\pi) = 0)$.

6. Montrer que $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ où T_0 est la période propre du mouvement.

Mathématiquement, la fonction $x(t)$ est périodique 2π (c'est un cosinus). Ceci se traduit par la relation :
$$X_m . \cos(\omega_0 . t) = X_m . \cos(\omega_0 . t + 2\pi)$$
Physiquement, la fonction $x(t)$ a une période T_0. Ceci se traduit par la relation :
$$X_m . \cos(\omega_0 . t) = X_m . \cos(\omega_0 . (t + T_0))$$

On peut donc écrire : $X_m . \cos(\omega_0 . t + 2\pi) = X_m . \cos(\omega_0 . (t + T_0))$
soit encore : $\cos(\omega_0 . t + 2\pi) = \cos(\omega_0 . t + \omega_0 . T_0)$

On en déduit donc que : $\omega_0 . T_0 = 2\pi$ d'où $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

7. Exprimer la période propre du mouvement dans chaque cas. Les conditions initiales ont-elles une influence sur la période ?

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ Les conditions initiales n'ont aucune influence sur la période du pendule.

Vérifier que la période a bien la dimension d'une durée.

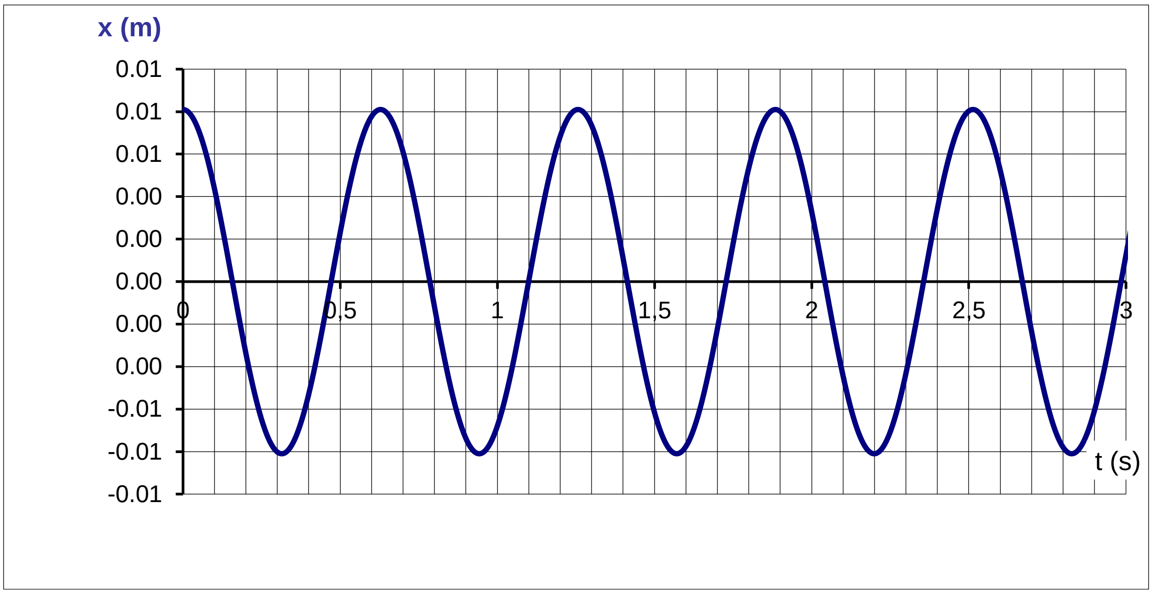
$$[T_0] = \left[2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right] = \left[\frac{m}{k}\right]^{\frac{1}{2}} = M^{\frac{1}{2}} \cdot [k]^{-\frac{1}{2}}$$

Avec $\quad [k] = \left[\frac{F}{x}\right] = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{L} = M \cdot T^{-2}$

D'où $\quad [T_0] = M^{\frac{1}{2}} \cdot M^{-\frac{1}{2}} \cdot T^{-\frac{1}{2} \times -2} = T$ La période a bien la dimension d'un temps.

Les conditions initiales n'ont aucune influence sur la période (ne dépend pas de X_{max}).

8. A bord de la station internationale en orbite autour de la Terre, on utilise alors oscillateur comme celui qu'on vient d'étudier, en remplaçant le palet par l'objet dont on veut déterminer la masse. Le coefficient de raideur du ressort utilisé est $k = 1{,}0 \times 10^4\ N.m^{-1}$. L'enregistrement x(t) obtenu est représenté ci-après :



Déterminer la masse m de l'objet.

Mesurons la période propre des oscillations : T_0=0,62s

On a vu que $\quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad$ d'où $\quad m = \frac{k \cdot T_0^2}{4\pi^2} \quad$ A.N. $\quad$ m=99 kg.

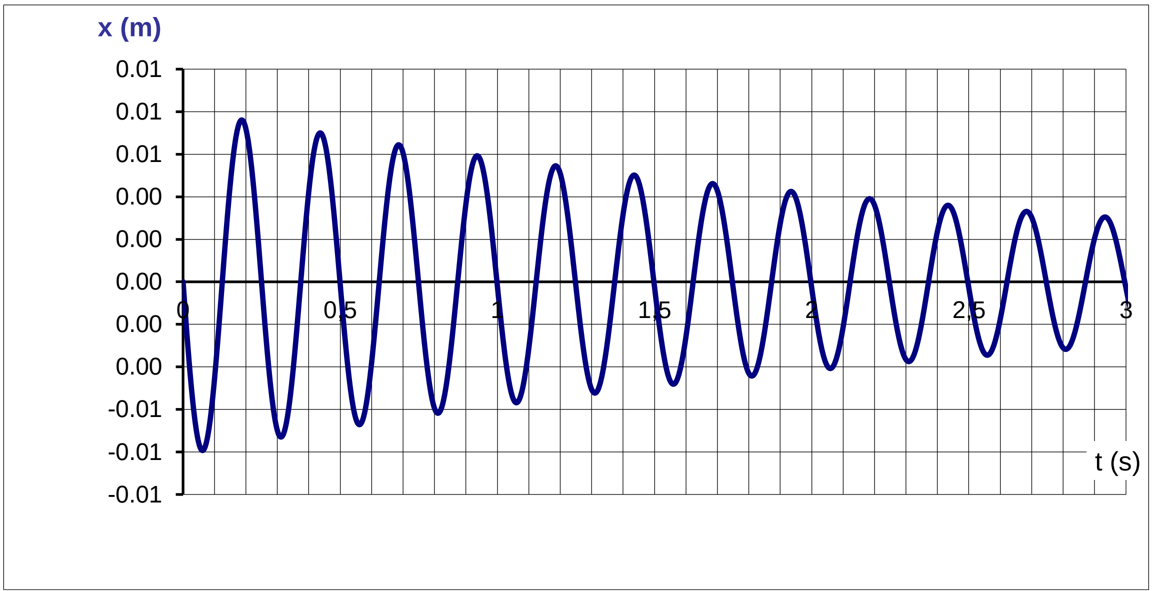
IV. Oscillateur mécanique horizontal avec amortissement :

On considère le même système. On suppose maintenant que les frottements ne sont plus négligeables et peuvent être modélisés par une force dont la valeur est proportionnelle à celle de la vitesse et dont le sens est opposé à celui du mouvement.

1. Donner l'expression vectorielle de la force de frottement en fonction du vecteur vitesse. On appellera μ le coefficient de frottement (coefficient de proportionnalité).
   $\overrightarrow{f} = -\mu \cdot \vec{v}$ avec $\vec{v} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i}$ d'où $\overrightarrow{f} = -\mu \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i}$

2. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
   2ème loi de Newton : $\vec{F} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}$ d'où $-k \cdot x \cdot \vec{i} - \mu \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i}$
   Et donc $\frac{d^2\,x}{dt^2} + \frac{\mu}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$

3. On considère les valeurs caractéristiques suivantes de l'oscillateur : k=190N/m et m=300g.
   L'enregistrement de la position du mobile en fonction du temps donne le graphe suivant :



a. Les forces de frottement sont-elles négligeables ? Justifier.
   Non, il y a amortissement des oscillations.

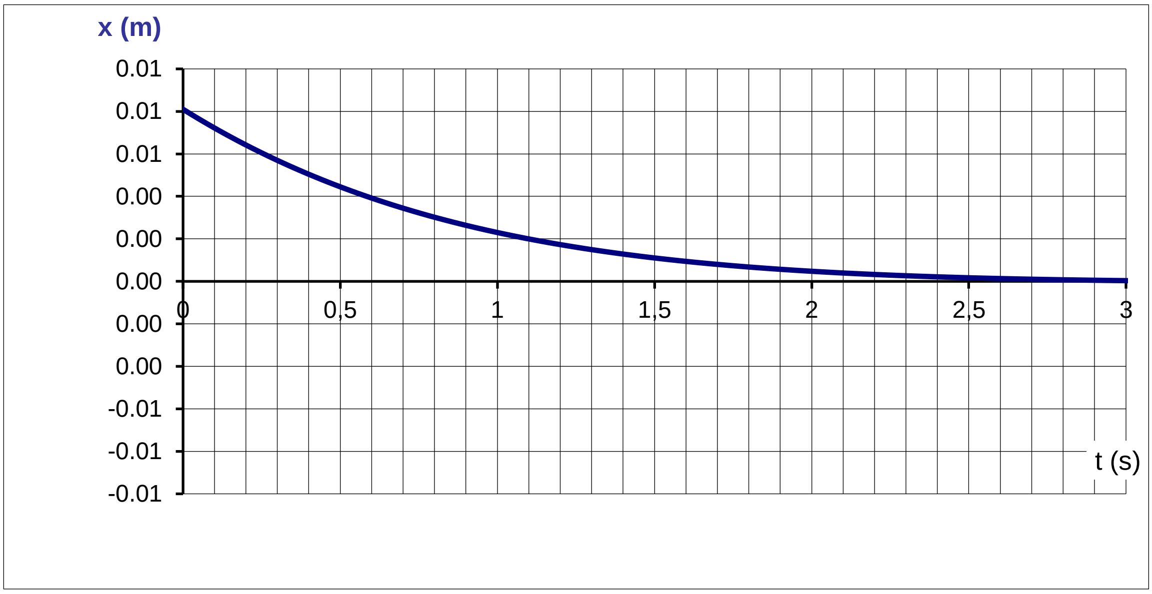
b. Mesurer la période des oscillations.
   Calculer à la valeur de la période propre de l'oscillateur qui ne serait pas amorti par des forces de frottement.
   $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ A.N. T_0=2,50.10^{-1}s
   Conclure et qualifier le régime de l'oscillateur étudié.
   La période mesurée est : T=2,50.10^{-1}s.
   On constate que $T=T_0$
   Le régime est qualifié de pseudo périodique.

c. Quelle est la position de départ (à t=0) du palet ?
   Le mobile est dans la position d'équilibre (x(0)=0).

d. A-t-on communiqué au palet une vitesse initiale ? Si oui, dans quel sens ?

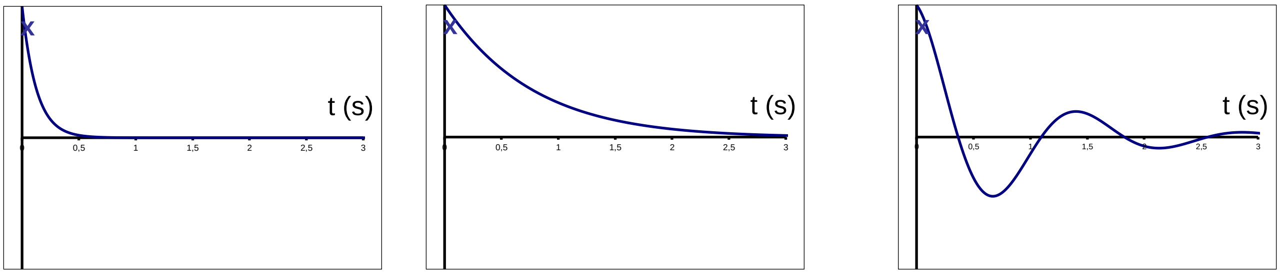
Pour engendrer les oscillations, on lui a communiqué une vitesse initiale (élan) suivant $-\vec{i}$.
(x<0 au début du mouvement)

4. On considère maintenant un amortissement plus important. L'enregistrement obtenu est représenté ci-après ; qualifier le régime.



Régime apériodique.

5. On considère les amortisseurs de trois véhicules différents : 2 CV , 205 Peugeot un peu fatigué, voiture neuve. Attribuer chacun des graphes à un des véhicules et préciser lequel est le plus adapté pour le confort et la sécurité des passagers. Justifier les réponses.



Voiture neuve 205 2 CV

V. Point de vue énergétique :

1. Energie mécanique de l'oscillateur :
   On considère le système {ressort + masse} horizontal.

- Quelle type d'énergie potentielle varie au cours des oscillations ? Donner l'expression de cette énergie potentielle.
  C'est l'énergie potentielle élastique qui varie.

$$Ep_k = \frac{1}{2}k \cdot x^2$$

- L'énergie potentielle de pesanteur varie-t-elle au cours du mouvement ? Quelle valeur va-t-on lui attribuer ?
  L'énergie potentielle de pesanteur ne varie pas : on choisit $Ep_p=0$

- Déduire l'énergie mécanique du système.

$$Em = Ec + Ep_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k \cdot x^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}k \cdot x^2$$

2. En l'absence de frottement, que peut-on dire de l'énergie mécanique. Montrer qu'on peut retrouver l'équation différentielle du mouvement en utilisant cette hypothèse.
   L'énergie mécanique étant constante, on peut écrire que $\frac{dEm}{dt} = 0$
   Or $\frac{dEm}{dt} = \frac{1}{2}m \cdot 2 \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right) \cdot \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{1}{2}k \cdot 2 \cdot x \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dx}{dt} \cdot \left(m\frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x\right)$
   On a donc $\frac{dx}{dt} \cdot \left(m\frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x\right) = 0$ soit $\left(m\frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x\right) = 0$, la vitesse n'étant pas toujours nulle.
   On retrouve bien l'équation différentielle : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$

3. Montrer que la vitesse maximale du palet au cours de son mouvement s'exprime de façon suivante : $V_m = 2\pi.\frac{X_m}{T_0}$
   Exprimons l'énergie mécanique au départ : $Em(0) = Ec(0) + Ep_k(0) = \frac{1}{2}mv(0)^2 + \frac{1}{2}k \cdot {X_m}^2 = \frac{1}{2}k \cdot {X_m}^2$
   Exprimons l'énergie mécanique au passage à la position d'équilibre :

$$Em_{eq} = Ec_{eq} + Ep_{k\,eq} = \frac{1}{2}m \cdot {V_m}^2 + \frac{1}{2}k \cdot {x_{eq}}^2 = \frac{1}{2}m \cdot {V_m}^2 + 0$$

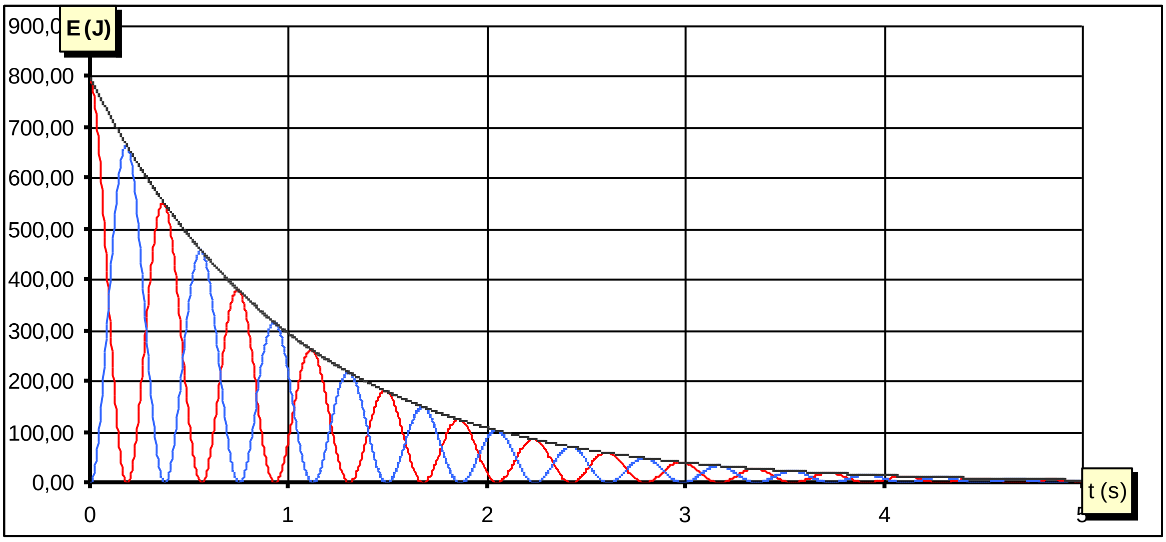
   Conservation de l'énergie mécanique : $Em(0) = Em_{eq}$
   D'où $\frac{1}{2}k \cdot {X_m}^2 = \frac{1}{2}m \cdot {V_m}^2$

$$V_m = X_m \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

   Or, d'après la définition de la période : $\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T_0}$ d'où $V_m = \frac{2\pi}{T_0} \cdot X_m$

4. On prend en compte maintenant les frottements.
   - L'énergie mécanique du système est-elle toujours conservée ? Si non, sous quelle forme est-elle dissipée ?
     L'énergie mécanique n'est pas constante : elle est dissipée sous forme de chaleur par les frottements.

   - On considère les courbes donnant les évolutions des énergies cinétiques, potentilles et mécaniques au cours du temps ; à t=0, le palet est lâché sans vitesse initiale d'une position étirée du ressort X_{m0}.



Attribuer un nom à chacune des trois courbes.

EN rouge : Epk

En bleu : Ec

En noir : Em

- Etablir l'expression de E_{m0} la valeur de l'énergie mécanique initiale en fonction de X_{m0}.

$Em(0) = Ec(0) + Ep_k(0) = \frac{1}{2}mv(0)^2 + \frac{1}{2}k \cdot {X_{m0}}^2 = \frac{1}{2}k \cdot {X_{m0}}^2$

- Au bout d'une oscillation, l'énergie mécanique initiale est divisée par r. Calculer r ($r = \frac{E_{m0}}{E_{m1}}$).

$r = \frac{800}{380} = 2{,}1$

- Montrer que $\frac{E_{m1}}{E_{m2}} = r$. En déduire l'expression de E_{mn}, au bout de la n-ième oscillation.

$\frac{E_{m1}}{E_{m2}} = \frac{380}{180} = 2{,}1$

$\frac{E_{m0}}{E_{m1}} = r$ et $\frac{E_{m1}}{E_{m2}} = r$ d'où $\frac{E_{m0}}{E_{m2}} = \frac{E_{m0}}{E_{m1}} \times \frac{E_{m1}}{E_{m2}} = r \times r = r^2$

En généralisant : $\frac{E_{m0}}{E_{m3}} = r^3$ … et $\frac{E_{m0}}{E_{mn}} = r^n$

- $ay'' + by' + cy = 0 \quad (E_0)$
- L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est *l'équation caractéristique*
- Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant

Théorème

1. Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ et les solutions de (E_0) sont les

$$\boxed{y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

2. Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une racine double r_0 et les solutions de (E_0) sont les

$$\boxed{y(x) = (\lambda + \mu x)e^{r_0 x} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

3. Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux racines complexes $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ et les solutions de (E_0) sont

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha x}(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)) \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

En physique, on utilise souvent l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = y$$

L'équation différentielle homogène associée

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

possède selon le signe de $\lambda^2 - \omega_0^2$ les solutions suivantes :

- $\lambda^2 > \omega_0^2 : x(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}\right)$, avec $\alpha = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$, dit **régime apériodique**,
- $\lambda^2 = \omega_0^2 : x(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(At + B\right)$, dit **régime critique**,
- $\lambda^2 < \omega_0^2 : x(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$, avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$, dit **régime pseudo-périodique**.

On note aussi cette équation différentielle $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = y$ (en fonction du temps).

On peut également avoir une équation différentielle de la forme $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = d$. Dans ce cas, $2\lambda = \frac{b}{a}, \omega_0^2 = \frac{c}{a}$ et $y = \frac{d}{a}$.