Détermination de la masse de particules relativistes

Formules relativistes – relation masse au repos, énergie et quantité de mouvement

- Postulat d'Einstein : énergie au repos d'une particule : $\boxed{E_0 = m_0 c^2}$

- Masse d'une particule en mouvement : $m = \gamma m_0$

- Energie d'une particule relativiste en mouvement :
  $\boxed{E = mc^2 = \gamma m_0 c^2}$ avec $\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$
  Conséquence : expression de l'énergie cinétique : $Ec = E - E_0 = (\gamma - 1)m_0 c^2$

- Quantité de mouvement (impulsion) : $\boxed{p = mv = \gamma m_0 v}$

- Expression de l'énergie en fonction de p, m_0 et c : $\boxed{E^2 = {m_0}^2 c^4 + p^2 c^2}$

  Démonstration :
  - A partir de la quantité de mouvement : $m = \frac{p}{v}$
    d'où $E = \frac{p}{v} . c^2 = \frac{p.c^2}{v}$ d'où $E^2 = p^2 . c^2 . \frac{c^2}{v^2}$
    donc $\frac{v^2}{c^2} = \frac{p^2.c^2}{E^2}$
  - A partir de l'énergie : $\frac{1}{\gamma} = \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{m_0.c^2}{E}$ d'où $1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0^2.c^4}{E^2}$

  et donc $1 - \frac{p^2.c^2}{E^2} = \frac{m_0^2.c^4}{E^2}$
  Ce qui conduit à $E^2 = {m_0}^2 c^4 + p^2 c^2$

- Intérêt de la formule : $m_0^2 = \frac{E^2}{c^4} - \frac{p^2}{c^2}$
  Les mesures de E et p permettent de déterminer la masse de la particule au repos, et donc de la définir.

- Analyse au niveau des unités :

  Si on mesure E en MeV et p en $\frac{MeV}{c}$, alors on aura $[m_0]^2 = \frac{MeV^2}{c^4} + \frac{\left(\frac{MeV}{c}\right)^2}{c^2} = \frac{MeV^2}{c^4}$
  et donc $[m_0] = \frac{MeV}{c^2}$
  Avec ces unités le calcul de la masse au repos devient : $\boxed{m_0^2 = E^2 - p^2}$

  La masse au repos d'un proton est $m_0 = 1{,}67 \times 10^{-27} kg$. Convertir cette valeur en MeV/c^2
  $E_0 = m_0.c^2$ A.N. $E_0 = 1{,}67\times10^{-27}\times(3{,}00\times10^{8})^2 = 1{,}50\times10^{-10}$ J
  Convertissons cette énergie en eV : $E_0 = \frac{1{,}50\times10^{-10}}{1{,}60\times10^{-13}} = 938 MeV$
  La masse du proton est donc $m_0 = 938 \frac{MeV}{c^2}$ (par référence à la formule $m_0 = \frac{E_0}{c^2}$)

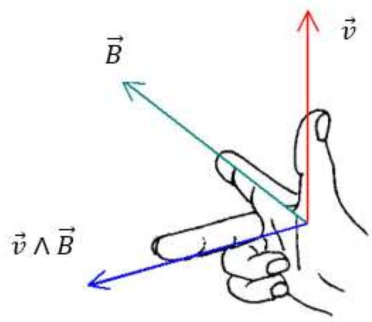
- Remarque : cas des particules sans masse :
  Si $m_0 = 0$ alors $E = p . c$ (cas du photon)
  avec $E = h . \nu = h . \frac{c}{\lambda}$ on arrive à $p . c = \frac{h}{\lambda} . c$
  On retrouve l'hypothèse quantique : $\boxed{p = \frac{h}{\lambda}}$

Détermination de la quantité de mouvement d'une particule relativiste

Pour déterminer la quantité de mouvement d'une particule, on utilise la déviation de la particule par un champ magnétique B :

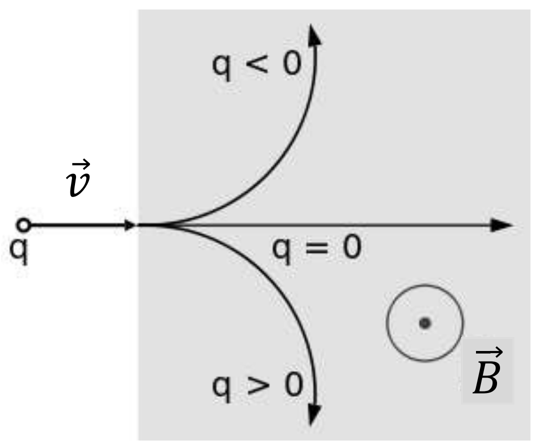
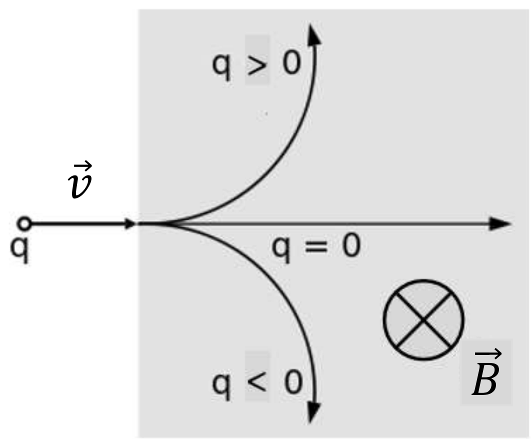
- Lorsqu'une particule arrive dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ avec une vitesse $\vec{v}$, elle subit une force, appelée force de Lorentz, dont l'expression est $\vec{F} = q \,. \vec{v} \wedge \vec{B}$

  Lorsque $\vec{B}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires l'un à l'autre, la direction du vecteur $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est donné par la règle des trois doigts de la main droite :
  si $q > 0$ alors $\vec{F}$ est orienté dans le même sens que $\vec{v} \wedge \vec{B}$
  si $q < 0$ alors $\vec{F}$ est orienté dans le sens opposé de $\vec{v} \wedge \vec{B}$



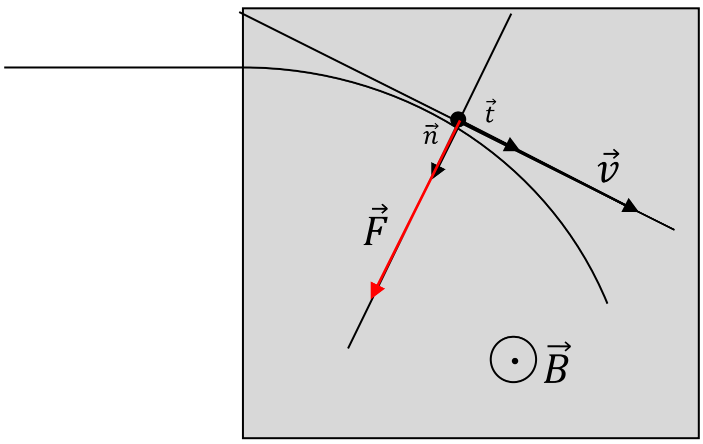
  Dans ces cas ($\vec{v}$ perpendiculaire à $\vec{B}$) l'intensité de la force de Lorentz est $F = |q|. v. B$.

- Représentation des trois directions dans un plan :
  Soit des particules de charge q arrivant dans une zone où règne un champ magnétique constant (zone grise) perpendiculaire au plan de la feuille : Justifier dans chaque cas le signe de la charge.

<table>
<tr><th>Cas où le champ magnétique pointe vers l'avant du plan en gris</th><th>Cas où le champ magnétique pointe vers l'arrière du plan gris</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

- Etude du mouvement de la particule dans un champ magnétique uniforme :
  On considère une particule de charge $q > 0$ entrant avec une vitesse $\vec{v}$ dans la zone soumise à un vide poussé (en gris sur la figure) où règne un champ magnétique $\vec{B}$ tel que $\vec{v}$ perpendiculaire à $\vec{B}$.

  1. On suppose toutes les forces qui pourraient agir sur la particule sont négligeables devant la force de Lorentz. Montrer que la trajectoire de la particule soumise au champ magnétique est uniforme et circulaire.



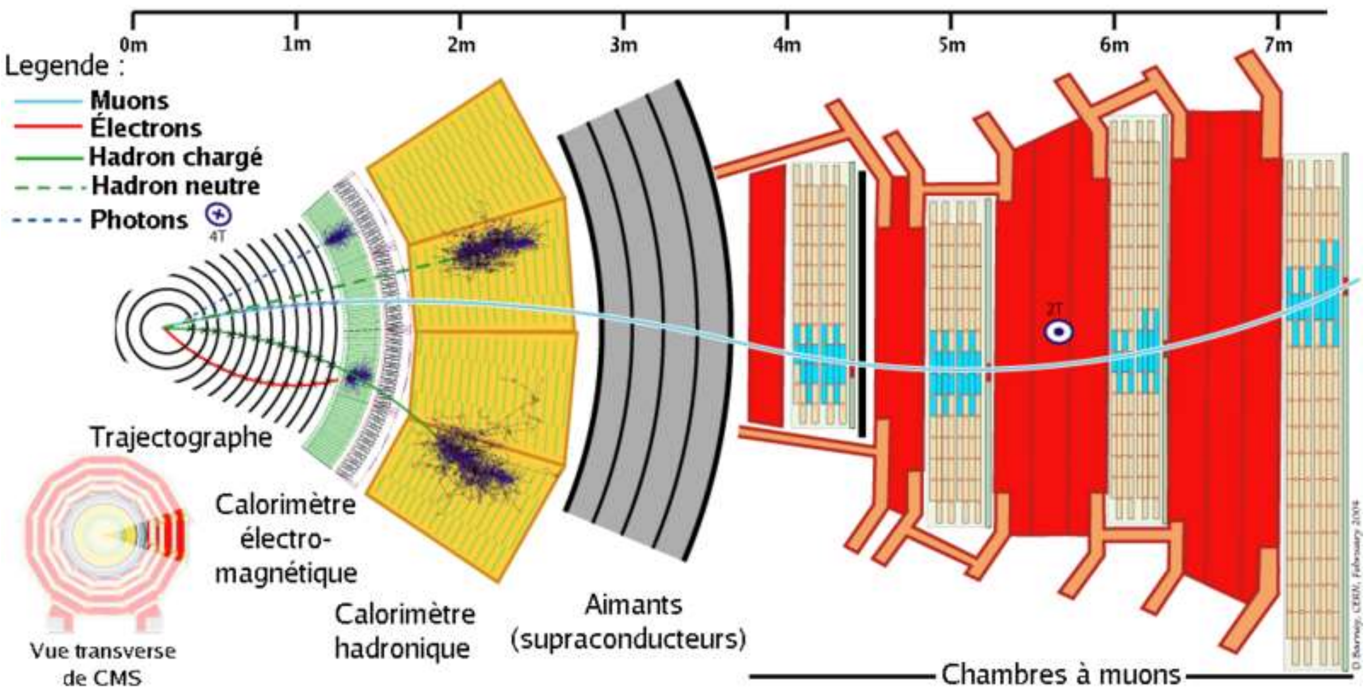
- Expressions des coordonnées de la force de Lorentz dans le repère de Frénet : $\vec{F} \begin{vmatrix} 0 \\ F = qvB \end{vmatrix}$
- D'après la deuxième loi de Newton $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ D'où $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$

  D'où les coordonnées de $\vec{a}$ dans le repère de Frénet : $\vec{a} \begin{vmatrix} a_t = 0 \\ a_n = \frac{qvB}{m} \end{vmatrix}$
- Or les coordonnées générales de l'accélération dans le repère de Frénet sont : $\vec{a} \begin{vmatrix} a_t = \frac{dv}{dt} \\ a_n = \frac{v^2}{r} \end{vmatrix}$

  On a donc :
  suivant $\vec{t}$: $\frac{dv}{dt} = 0$ ce qui implique que la valeur de la vitesse est bien constante.
  suivant $\vec{n}$: $\frac{v^2}{r} = \frac{qvB}{m}$ d'où $r = \frac{mv}{qB}$
  La masse de la particule, sa vitesse, sa charge et le champ magnétique étant constant, le rayon de courbure de la trajectoire est également constant.
  La trajectoire est donc un cercle.

2. Exprimer la quantité de mouvement de la particule.
   $p = mv = qBr$

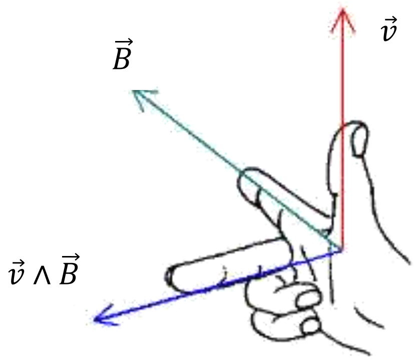
- Conclusion :
  - dans les détecteurs de particules, les trajectographes permettent de déterminer le rayon de leur trajectoire et d'en déduire la quantité de mouvement des particules.



  - le rôle des calorimètres est de déterminer l'énergie des particules

- Conversion de la quantité de mouvement en $\frac{Mev}{c}$:
  $[pc]$ a la dimension d'une énergie exprimée en Joules
  $[pc/e]$ est la valeur de cette énergie en eV
  donc dans le cas d'un proton ou d'un électron : $pc = \frac{eBrc}{e} = Brc$
  $pc = Brc = 3 \times 10^8 Br$ a la dimension d'une énergie exprimée en eV

  On a donc : $p = 0{,}3Br$ où p est exprimée en MeV/c


$\vec{v}$
$\vec{B}$
$\vec{v} \wedge \vec{B}$